



SÈRIE 1

Part 1

Responen QUATRE de les sis qüestions següents.

[6 punts; 1,5 punts cada qüestió]

1.

SOLUCIÓ:

El domini de la funció és el conjunt de valors pels quals està definida la funció

$$f(x) = \sqrt{3x+1} - \sqrt{2x-1}$$

S'han de verificar simultàniament les dues condicions següents:

$$3x + 1 \geq 0$$

$$2x - 1 \geq 0$$

És a dir, $x \geq \frac{-1}{3}$, $x \geq \frac{1}{2}$. Per tant, el domini de la funció és l'interval

$$\left[\frac{1}{2}, +\infty\right) = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

Puntuació:

- 1 punt per les dues condicions del domini;
- 0,5 punts per la determinació correcta del domini.
- Penalitzeu amb 0,5 punts si no s'inclou el valor $\frac{1}{2}$ en el domini.



Proves d'accés a la Universitat per a més grans de 25 anys 2025. Criteris d'avaluació

2.

SOLUCIÓ:

S'ha de justificar que la derivada de $F(x)$ coincideix amb $f(x)$. En efecte,

$$F(x) = \frac{\sqrt{x}}{3} (4x + 3)$$

La seva derivada és

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{1}{6\sqrt{x}} (4x + 3) + \frac{\sqrt{x}}{3} \cdot 4 = \left(\frac{1}{6\sqrt{x}} \right) ((4x + 3) + (4\sqrt{x} \cdot 2\sqrt{x})) = \\ &= \left(\frac{1}{6\sqrt{x}} \right) (12x + 3) = \frac{12x}{6\sqrt{x}} + \frac{3}{6\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} = f(x) \end{aligned}$$

Puntuació:

- 0,5 punts per la relació entre primitiva i derivada;
- 0,5 punts pel càlcul correcte de la derivada.
- 0,5 punts per la justificació de la igualtat amb $f(x)$.
- Penalitzeu amb fins 1 punt les errades greus en el càlcul de la derivada.

3.

SOLUCIÓ:

a) Si $x = 6$ és una solució de l'equació, aleshores en substituir-la es té

$$x^2 - kx + 24 = 36 - 6k + 24 = 60 - 6k = 0$$

És a dir, $k = 10$.

b) Si considerem que $x = 8$ i $x = 3$ són les dues solucions de l'equació

$$x^2 - kx + 24 = 0,$$

aleshores es pot escriure la factorització següent:

$$x^2 - kx + 24 = (x - 8) \cdot (x - 3) = x^2 - 11x + 24 = 0$$



Proves d'accés a la Universitat per a més grans de 25 anys 2025. Criteris d'avaluació

Puntuació:

- a) 0,5 punts per l'aplicació adequada del concepte de solució d'una equació; 0,5 punts per la determinació correcta del valor $k = 10$.
- b) 0,5 punts per la determinació de la segona equació. Si s'utilitza el mateix procediment que en l'apartat a), és suficient substituir una de les dues solucions per determinar el valor del paràmetre $k = 11$; en aquest cas, s'ha de comprovar que els dos valors, $x = 8$ i $x = 3$, són solucions de l'equació.

4.

SOLUCIÓ:

Els punts $A(1, 2, 0)$, $B(0, 3, -1)$ i $C(1, 0, 1)$ determinen el pla π ; escriurem una equació d'aquest pla i hi substituïrem el punt $D(-1, 2, a)$. Caldrà determinar el valor de a per tal que es verifiqui l'equació del pla.

Dos vectors directores del pla π són $u = \overrightarrow{AB} = B - A = (-1, 1, -1)$ i $v = \overrightarrow{AC} = C - A = (0, -2, 1)$; una equació del pla π amb aquests dos vectors directores i que passa pel punt $A(1, 2, 0)$ és

$$\det \begin{pmatrix} x-1 & y-2 & z \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

Hi substituïm el punt $D(-1, 2, a)$ i es té

$$\det \begin{pmatrix} -2 & 0 & a \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = -2 + 2a + 4 = 2a + 2 = 0$$

Es dedueix que els punts són coplanaris només en el cas $a = -1$.

Puntuació:

- 0,5 punts per la relació entre els punts coplanaris;
- 0,5 punts per l'equació del pla;
- 0,5 punts per la determinació correcta del valor de a .



Proves d'accés a la Universitat per a més grans de 25 anys 2025. Criteris d'avaluació

5.

SOLUCIÓ:

La matriu X ha de ser una matriu quadrada d'ordre 2 per tal que es pugui multiplicar per la matriu A^2 (quadrada d'ordre 2) i que al resultat del producte es pugui restar la matriu B (quadrada d'ordre 2).

Escrivim la matriu $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$;

de la relació $A^2 \cdot X - B = C$ es té $A^2 \cdot X = B + C$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B + C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -12 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -13 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A^2 \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - 4c & b - 4d \\ c & d \end{pmatrix} = B + C = \begin{pmatrix} 5 & -13 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Es té $c = 1$, $d = 6$, $a - 4c = 5$, $b - 4d = -13$;

per tant, la matriu X és $X = \begin{pmatrix} 9 & 11 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$

Puntuació:

- 0,5 punts pel càlcul de A^2 ; 0,5 punts per escriure una equació matricial correcta;
- 0,5 punts per la determinació correcta dels elements de la matriu X .
- No penalitzeu el fet de no justificar que la matriu X sigui quadrada d'ordre 2. Considereu correctes altres alternatives de resolució, com per exemple, $X = (A^2)^{-1} \cdot (B + C)$; en aquest cas, no tingueu en compte els petits errors de càlcul de la matriu inversa, sempre i quan el procediment sigui adequat.



Proves d'accés a la Universitat per a més grans de 25 anys 2025. Criteris d'avaluació

6.

SOLUCIÓ:

El sistema és homogeni, per tant és compatible (sempre té solució) i la solució trivial sempre és solució d'un sistema homogeni. Els sistemes homogenis poden ser compatibles determinats (tenen una única solució, que és la solució trivial) o compatibles indeterminats (tenen infinites solucions). Atès que es tracta d'un sistema de tres equacions amb tres incògnites, el sistema serà compatible determinat si la matriu del sistema té rang 3, és a dir, el seu determinant és diferent de zero.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 4 & -6 & 2 \\ 5 & -4 & k \end{pmatrix} = -6k - 50 + 8 + 20k = 14k - 42 \neq 0$$

Per a $k \neq 3$, el determinant és diferent de zero, el sistema és compatible determinat i l'única solució és la solució trivial.

Puntuació:

- 0,5 punts per la relació entre el rang de la matriu del sistema i el tipus de sistema;
- 0,5 punts pel càlcul correcte del determinant;
- 0,5 punts per la interpretació correcta del resultat.
- No tingueu en compte els possibles petits errors en el càlcul del valor del paràmetre k .



Part 2

Resoleu UN dels dos problemes següents.

[4 punts en total]

1.

SOLUCIÓ:

- a) Determinem el punt mitjà M_1 entre B i C i la recta r_1 que conté la mitjana que uneix A i M_1 .

$$M_1 = \frac{(B + C)}{2} = (-1, 2)$$

Atès que M_1 i A no es troben en la mateixa vertical, l'equació de la recta r_1 es pot escriure $r_1: y = mx + n$. Substituint els punts M_1 i A en aquesta equació, es determinen els valors de m i n .

$$\begin{cases} -m + n = 2 \\ 5m + n = 4 \end{cases}$$

Restant les dues equacions, es té $m = \frac{1}{3}$ i $n = \frac{7}{3}$. Aleshores, $r_1: y = \frac{x+7}{3}$.

Repetim el procediment amb el punt mitjà M_2 entre A i C i la recta r_2 que conté la mitjana que uneix B i M_2 .

$$M_2 = \frac{(A + C)}{2} = (3, 1)$$

M_2 i B no es troben en la mateixa vertical i l'equació de la recta r_2 es pot escriure

$r_2: y = mx + n$. Substituint els punts M_2 i B , els valors de m i n són les solucions de

$$\begin{cases} 3m + n = 1 \\ -3m + n = 6 \end{cases}$$

Es té $m = \frac{-5}{6}$ i $n = \frac{21}{6}$. Aleshores, $r_2: y = \frac{-5x+21}{6}$.

Finalment, determinem el punt mitjà M_3 entre A i B : $M_3 = \frac{(A+B)}{2} = (1, 5)$.

Aquest punt es troba en la mateixa vertical que el punt $C(1, -2)$; per tant, la tercera mitjana es troba en la recta vertical $x = 1$.



Proves d'accés a la Universitat per a més grans de 25 anys 2025. Criteris d'avaluació

- b) Començarem per determinar la intersecció entre les rectes r_1 i r_3 . A continuació, hem de verificar que el punt trobat també verifica l'equació de la recta r_2 .

$$\begin{cases} y = \frac{x+7}{3} \\ x = 1 \end{cases}$$

La intersecció és el punt $H(1, \frac{8}{3})$. En efecte, aquest punt també verifica l'equació de la recta r_2

$$r_2: y = \frac{-5x+21}{6} = \frac{-5+21}{6} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$$

- c) La mitjana aritmètica dels tres vèrtexs és

$$\frac{A+B+C}{3} = \frac{(5,4)+(-3,6)+(1,-2)}{3} = \frac{(3,8)}{3} = \left(1, \frac{8}{3}\right),$$

la qual coincideix amb el punt H .

Puntuació:

- a) 0,5 punts per cada equació correcta de cada mitjana. Considereu correctes altres maneres de determinar les equacions de les rectes; per exemple, en el cas de r_1 , l'equació es pot determinar a partir de $\det \begin{pmatrix} x+1 & 6 \\ y-2 & 2 \end{pmatrix} = 0$.
- b) 2 punts per la determinació correcta de la intersecció de les mitjanes. És necessari comprovar que és la intersecció de les tres rectes, no només de dues. Cas que només es determini la intersecció de dues de les rectes, penalitzeu amb 0,5 punts.
- c) 0,5 punts pel càlcul del baricentre a partir de la mitjana aritmètica de les coordenades del vèrtex. No tingueu en compte les errades que siguin conseqüència d'un error de càlcul en la determinació, per exemple, d'un dels punts mitjans.

Proves d'accés a la Universitat per a més grans de 25 anys 2025. Criteris d'avaluació

2.

SOLUCIÓ:

- a) La quantitat produïda i venuda d'acer de baixa resistència és una quantitat x , amb $0 \leq x \leq 8$. D'altra banda, la quantitat produïda i venuda d'acer d'alta resistència també ha de ser positiva, i a més està donada per

$$p(x) = \frac{40 - 5x}{10 - x} \geq 0$$

Per comprovar que aquesta producció és decreixent respecte de x , hem de justificar que la derivada de $p(x)$ és negativa en l'interval $0 \leq x \leq 8$.

En efecte

$$p'(x) = \frac{-5(10 - x) - (40 - 5x)(-1)}{(10 - x)^2} = \frac{-10}{(10 - x)^2} < 0$$

atès que el denominador és positiu (elevat al quadrat).

- b) Depenent de la quantitat x produïda d'acer de baixa resistència, els ingressos es calculen amb la funció

$$I(x) = 100x + 250p(x) = 100x + 250\left(\frac{40 - 5x}{10 - x}\right)$$

El màxim d'aquesta funció es pot trobar en els valors $x = 0$, $x = 8$ o en els valors que fan que la derivada sigui igual a zero.

$$I'(x) = 100 + 250\left(\frac{-10}{(10 - x)^2}\right) = 100 - \frac{2.500}{(10 - x)^2} = 0$$

De l'equació anterior es té $100 = \frac{2.500}{(10 - x)^2}$, és a dir, $(10 - x)^2 = 25$.

Les dues solucions de l'equació són $x = 15$ (valor no vàlid perquè $x \leq 8$) i $x = 5$.

Calculem la segona derivada de la funció d'ingressos:

$$I''(x) = -\frac{5.000}{(10 - x)^3}$$

La segona derivada en $x = 5$ és negativa, per tant, aquest valor és un màxim relatiu (o local) de la funció d'ingressos.



Proves d'accés a la Universitat per a més grans de 25 anys 2025. Criteris d'avaluació

Quan no es produeix acer de baixa resistència, $x = 0$, es produeixen $p(0) = 4$ tones d'acer d'alta resistència i els ingressos són de $I(0) = 1.000$ €.

Quan es produeix la quantitat màxima d'acer de baixa resistència, $x = 8$, no es produeix acer d'alta resistència, $p(8) = 0$, i els ingressos són de $I(8) = 800$ €.

Quan es produeixen $x = 5$ tones d'acer de baixa resistència, aleshores es produeixen $p(5) = 3$ tones d'acer d'alta resistència, i els ingressos són de $I(5) = 1.250$ €. Es tracta d'un màxim absolut (o global).

Puntuació:

a)

- 0,5 punts per la relació entre el signe de la derivada i el decreixement;
- 1 punt pel càlcul correcte de la derivada;
- 0,5 punts per la justificació del signe de la derivada.

b)

- 0,5 punts per la funció d'ingressos;
- 0,5 punts pel càlcul correcte de la derivada de la funció d'ingressos;
- 0,5 punts pel punt que verifica la condició necessària;
- 0,5 punts per verificar una condició suficient de màxim.

No es necessari justificar que el màxim és absolut ni verificar el valor de la funció d'ingressos en els extrems de l'interval.

Penalitzeu amb fins 0,5 punts els errors greus en el càlcul de qualsevol de les derivades.