SÈRIE 3

Normes generals

1. Corregiu amb **bolígraf vermell**, usant marques per a indicar allò que considereu incorrecte (subratllant-ho, encerclant-ho, fent-hi un requadre, etc.).
2. Anoteu la **puntuació parcial** de cada qüestió dins el quadern, al costat de cada resposta.
3. **Justifiqueu** breument la raó de la puntuació atorgada a cada pregunta, sobretot quan no hi hàgiu atorgat la màxima qualificació.
4. Transcriviu a la **graella de la pàgina inicial** del quadern la puntuació atorgada a cadascuna de les preguntes i feu la **suma d'aquestes notes parcials**.
5. La **qualificació final de la prova** és el resultat d'**arrodonir** la suma de les notes parcials al mig punt més pròxim (p. ex.: 8,15 → 8,0; 8,35 → 8,5). En el cas que el resultat d'aquesta suma sigui equidistant de dos valors, heu de triar sempre el més alt (p. ex.: 6,25 → 6,50; 6,75 → 7,00). Aquesta qualificació final és la de l'etiqueta de nota.
6. Enganxeu a tots els quaderns l'etiqueta identificadora com a corrector o correctora i l'etiqueta de qualificació.
7. Retorneu els exàmens ordenats per nota, de la més baixa a la més alta.
8. Els dubtes sobre qüestions referents a la correcció dels exàmens els heu d'adreçar **exclusivament** al responsable de la matèria i no al conjunt dels correctors.
9. **No heu d'escriure res ni anotar cap qualificació en les caselles de la graella de la pàgina inicial ombrejades en gris perquè estan destinades al tribunal de revisió (TR).**

Part 1

Responeu QUATRE de les sis qüestions següents.

[6 punts; 1,5 punts cada qüestió]

1.- Considereu la progressió geomètrica $\left\{a_1, a_2 = \frac{2}{5}, a_3 = -1, a_4 = \frac{5}{2}, \ldots\right\}$.

a) Determineu la raó de la progressió.

[0,5 punts]

b) Calculeu el primer i cinquè termes de la progressió, a_1, a_5.

[1 punt]

Solució:

a) En una progressió geomètrica, la raó està donada per $r = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_4}{a_3} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{-5}{2}$

b) El cinquè terme de la progressió geomètrica és $a_5 = a_4 \cdot r = \frac{-25}{4}$. El primer terme de la successió verifica $a_1 = \frac{a_2}{r} = \frac{-4}{25}$.

Puntuació: a) 0,5 punts. b) 0,5 punts pel càlcul correcte de cadascun dels dos termes de la successió. Valoreu la coherència de la resposta respecte a l'apartat anterior.

2.- Considereu el pla $\pi: (\sqrt{2}-2)x + (\sqrt{2}+2)y - 2z = 0$ i la recta $r: (x, y, z) = (-2, 2, 4) + \lambda(-1, 1, 0)$.

a) Comproveu que el punt $P(-2, 2, 4)$ és un punt del pla i un punt de la recta.

[0,5 punts]

b) Determineu l'angle que formen el pla i la recta.

[1 punt]

Solució:

a) En efecte, el punt $P(-2, 2, 4)$ verifica l'equació del pla $(\sqrt{2}-2) \cdot (-2) + (\sqrt{2}+2) \cdot 2 - 2 \cdot 4 = 0$ i l'equació de la recta per $\lambda = 0$.

b) L'angle entre la recta i el pla és el complementari de l'angle α que formen el vector director de la recta $\vec{d} = (-1, 1, 0)$ i el vector normal del pla $\vec{n} = ((\sqrt{2}-2), (\sqrt{2}+2), 2)$.

Aleshores, es té que

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{d} \cdot \vec{n}}{\|\vec{d}\| \|\vec{n}\|} = \frac{4}{\sqrt{2} \cdot 4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

És a dir, l'angle és $\alpha = \frac{\pi}{4}$. El complementari d'aquest angle és $\beta = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$.

Puntuació: a) 0,5 punts per la justificació de la pertinença. 0,5 punts per la relació entre l'angle de la recta i el pla i el complementari de l'angle del vector director i el vector normal; 0,5 punts pel càlcul correcte de l'angle. Penalitzeu amb 0,5 punts si no es fa cap referència al complementari de l'angle.

3.- Considereu els sistemes $\left.\begin{matrix} 2x+3y=0 \\ 4x-5y=22 \end{matrix}\right\}$ i $\left.\begin{matrix} x+y=1 \\ 3x-my=11 \end{matrix}\right\}$.

a) Resoleu el primer dels dos sistemes. Determineu el valor de m que fa que els sistemes siguin equivalents, és a dir, tinguin les mateixes solucions.
[1 punt]

b) Determineu el valor de m que fa que el segon sistema $\left.\begin{matrix} x+y=1 \\ 3x-my=11 \end{matrix}\right\}$ sigui incompatible.
[0,5 punts]

Solució:

a) El primer sistema té solució única $x=3$, $y=-2$. En efecte, si multipliquem la primera equació per dos i li restem la segona equació, es té $11y=-22$, d'on $y=-2$. Substituint aquest valor en la primera equació es té $2x-6=0$, d'on es dedueix $x=3$.

Substituint aquesta solució en el segon sistema es té $\left.\begin{matrix} x+y=3-2=1 \\ 3x-my=9+2m=11 \end{matrix}\right\}$, d'on s'obté $\boxed{m=1}$.

b) Per tal que el segon sistema sigui incompatible, el rang de la matriu del sistema, $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -m \end{pmatrix}$, ha de ser 1. Això només passarà si la segona fila de la matriu és múltiple de la primera, és a dir, només en el cas $\boxed{m=-3}$. En aquest cas, el sistema és $\left.\begin{matrix} x+y=1 \\ 3x+3y=11 \end{matrix}\right\}$, que és clarament incompatible, atès que el terme independent de la segona equació no és el triple del terme independent de la primera.

Puntuació: a) 0,5 punts per la resolució correcta del primer sistema. 0,5 punts per la determinació correcta del valor de m. b) 0,5 punts per un raonament correcte sobre la determinació correcta del valor de m; tingueu en compte només les errades molt greus de càlcul.

4.- Resoleu l'equació

$$\frac{1}{x}-\sqrt{1+\frac{1}{x}}=1$$

[1,5 punts]

Solució: Transformem l'equació original $\frac{1}{x} - \sqrt{1+\frac{1}{x}} = 1$

$$\frac{1}{x} - 1 = \sqrt{1+\frac{1}{x}}$$

Elevant al quadrat:

$$\left(\frac{1}{x} - 1\right)^2 = \left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)^2 = 1 + \frac{1}{x}$$

Operant i simplificant:

$$\left(\frac{1-x}{x}\right)^2 = \frac{x+1}{x}$$

$$\frac{1-2x+x^2}{x^2} = \frac{x+1}{x}$$

Observem que $x = 0$ no pot ser una solució vàlida de l'equació. Aleshores, es té que

$1 - 2x + x^2 = x \cdot (x+1) = x^2 + x$, és a dir, $1 = 3x$, d'on es té $\boxed{x = \frac{1}{3}}$.

Puntuació: 1,5 punts. Penalitzeu amb fins 0,5 punts les errades greus en els càlculs. Segons les operacions algebraiques realitzades, es podria arribar a una equació de segon grau de la forma $x - 3x^2 = 0$, amb dues solucions, $x = 0, x = 3$; en aquest cas, no tingueu en compte el fet de no descartar la solució nul·la.

5.- Justifiqueu que la funció

$$f(x) = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$$

té un màxim en el punt d'abscissa $x = 0$.

[1,5 punts]

Solució:

En primer lloc, s'ha de comprovar que la derivada primera de la funció s'anul·la en $x = 0$. En efecte,

$$f'(x) = \frac{2(-2x)\cdot(1+x^2)^2 - 2(1-x^2)2(1+x^2)2x}{(1+x^2)^4} = \frac{4x^3 - 12x}{(1+x^2)^3}$$

Es té que $f'(0) = 0$. A més, la derivada primera és positiva quan $x < 0$ i negativa quan $x > 0$, la qual cosa justifica que la funció té un màxim en $x = 0$.

Alternativament, es pot utilitzar el signe de la derivada segona $f''(x) = \frac{-12x^4+72x^2-12}{(1+x^2)^4}$ en $x = 0$ com a condició suficient de màxim.

Puntuació: 1 punt pel càlcul correcte de la derivada primera i l'aplicació necessària d'optimalitat. 0,5 punts per la condició suficient de màxim. Penalitzeu amb fins 1 punt les errades greus en el càlcul de les derivades.

6.- Justifiqueu que el triangle de vèrtexs $P(-3,2), Q(1,-2)$ i $R(5,6)$ és isòsceles.
[1,5 punts]

Solució: Calcularem la distància entre els vèrtexs del triangle.

$$d_1 = d(P,Q) = \sqrt{(1-(-3))^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{32}$$
$$d_2 = d(P,R) = \sqrt{(5-(-3))^2 + (6-2)^2} = \sqrt{80}$$
$$d_3 = d(Q,R) = \sqrt{(5-1)^2 + (6-(-2))^2} = \sqrt{80}$$

Es tracta d'un triangle isòsceles, atès que $\boxed{d_2 = d_3}$.

Puntuació: 0,5 punts per la descripció correcta del procediment. 1 punt pels càlculs i la conclusió coherent amb l'enunciat. Penalitzeu amb fins 0,5 punts la definició incorrecta de triangle isòsceles.

Part 2

Resoleu UN dels dos problemes següents.
[4 punts]

1.- Considereu matrius $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -1 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ i $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Justifiqueu que la matriu $\boldsymbol{A}$ té inversa i calculeu-la.
[2 punts]

b) Determineu la matriu quadrada $\boldsymbol{X}$ d'ordre 3 que compleix la igualtat $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$.
[2 punts]

Solució.-
a) El determinant de la matriu $\boldsymbol{A}$ és $\det(\boldsymbol{A}) = 2$, no nul, i per tant, la matriu té inversa.

La matriu d'adjunts de $\boldsymbol{A}$ és $\boldsymbol{\Delta} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & -1 \\ 18 & -4 & 6 \end{pmatrix}$; la transposada d'aquesta és la matriu complementària $\boldsymbol{A}^c = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 18 \\ 1 & 1 & -4 \\ -1 & -1 & 6 \end{pmatrix}$, i la matriu inversa resulta ser

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\boldsymbol{A})} \begin{pmatrix} -1 & -3 & 18 \\ 1 & 1 & -4 \\ -1 & -1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & -3/2 & 9 \\ 1/2 & 1/2 & -2 \\ -1/2 & -1/2 & 3 \end{pmatrix}$$

En efecte, es pot comprovar que $\boldsymbol{A^{-1}\cdot A = A\cdot A^{-1} = Id_3}$

b) De l'equació matricial $\boldsymbol{A\cdot X = B}$ es té

$$\boldsymbol{X = A^{-1}\cdot B} = \begin{pmatrix} -1/2 & -3/2 & 9 \\ 1/2 & 1/2 & -2 \\ -1/2 & -1/2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -9/2 \\ 0 & -3/2 & 3/2 \\ 1 & 2 & -3/2 \end{pmatrix}.$$

Puntuació.- a) 0,5 punts per la justificació de l'existència de la matriu inversa i 1,5 punts pel seu càlcul. Accepteu altres formes vàlides de calcular la matriu inversa. No és necessària la comprovació de la inversa. No tingueu en compte les petites errades de càlcul. b**)** 1 punt pel plantejament de la solució. Penalitzeu amb 0,5 punts la formulació incorrecta del producte. 1 punt pel càlcul del producte matricial. No tingueu en compte les errades de càlcul provinents de l'apartat anterior, valorant la coherència de la resposta amb la màxima puntuació.

2.- En un hort hi ha plantades 50 pomeres. Cada arbre produeix 800 pomes. Per cada pomera addicional que hi plantem, la producció de cada arbre es redueix en 10 pomes. Quantes pomeres més ens cal plantar per a obtenir la producció més alta possible? Quina és aquesta producció?
[4 punts]

Solució.-
Anomenem x la quantitat de pomeres addicionals que es plantaran a l'hort; aquesta quantitat ha de ser un valor positiu menor de 80 (valor a partir del qual les pomeres no produeixen pomes).

Aleshores, la quantitat total de pomeres és $q = 50 + x$; i la producció de cada arbre està donada per l'expressió $p = 800 - 10x$. D'aquesta manera, la funció de producció total de pomes de l'hort és $f(x) = (50 + x)\cdot(800 - 10x)$. Hem de determinar el valor de x que fa màxim el valor d'aquesta funció.

Segons la condició necessària de màxim, hem de determinar els valors que anul·len la derivada primera de la funció.
$f'(x) = (800 - 10x) - 10(50 + x) = 300 - 20x = 0$; l'única solució és $x = 15$.
D'acord amb la condició suficient de màxim, es comprova que la derivada segona $f''(x) = -20$ en $x = 15$ pren un valor negatiu.

Per tant, a l'hort hi haurà plantades un total de $q = 50 + x = 65$ pomeres, cadascuna de les quals produirà $p = 800 - 10x = 650$ pomes. La producció total màxima de l'hort serà de $f(15) = 65\cdot 650 = 42250$ pomes.

Alternativament, es pot argumentar que la funció de producció total

$f(x) = (50 + x) \cdot (800 - 10x)$ és una paràbola orientada negativament, la qual té el màxim (vèrtex) en el punt mitjà entre les dues arrels, que són $x_1 = -50$ i $x_2 = 80$, és a dir, el màxim es troba en el valor $x = 15$.

Puntuació.- 1,5 punts per la construcció de la funció de producció total i 0,5 punts pel càlcul de la seva derivada. 0,5 punts per l'aplicació de la condició necessària i 0,5 punts per l'aplicació de la condició suficient. 1 punt per la interpretació dels resultats i el càlcul de la producció màxima. Valoreu amb 1,5 punts un raonament correcte basat en el vèrtex d'una paràbola orientada negativament. Considereu la possibilitat de puntuar amb fins a 2 punts aquells exercicis que, sense ser correctes, resolen un problema d'optimització.