



Matemàtiques Sèrie 2

SOLUCIONS,
CRITERIS DE PUNTUACIÓ
I CORRECCIÓ

INSTRUCCIONS

- . Trieu i resoleu CINC dels set exercicis que es proposen.
- . Indiqueu clarament quins exercicis heu triat. Si no ho feu així, s'entendrà que heu escollit els cinc primers.
- . Cada exercici val 2 punts.

Material necessari

- . Material d'ús habitual: bolígraf, llapis, goma, regle, etc.
- . Compàs i semicercle graduat (transportador).
- . Calculadora científica.

Cada aspirant ha de portar el seu material. En cap cas no es permet la cessió de calculadores ni d'altres materials entre les persones aspirants.

1. Resoleu les qüestions següents.

a) Simplifiqueu els radicals següents tant com es pugui.

[1 punt: 0,5 punts per apartat]

$$a1) \sqrt[5]{\sqrt[3]{3^{10}}} = \sqrt[15]{3^{10}} = \sqrt[3]{3^2}$$

$$a2) \sqrt[3]{5^2} \cdot \sqrt[3]{5^7} \cdot \sqrt[3]{5^3} = \sqrt[3]{5^2 \cdot 5^7 \cdot 5^3} = \sqrt[3]{5^{12}} = 5^4$$

b) Racionalitzeu les fraccions següents.

[1 punt: 0,5 punts per apartat]

$$b1) \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}^2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$b2) \frac{4}{2+\sqrt{3}} = \frac{4(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = \frac{4(2-\sqrt{3})}{2^2-\sqrt{3}^2} = \frac{4(2-\sqrt{3})}{4-3} = \frac{4(2-\sqrt{3})}{1} = 8 - 4\sqrt{3}$$

2. Un pantà de les conques internes de Catalunya es troba, el dia d'avui, al 28% de la seva capacitat total.

a) Si aquesta és de 250 hm³, quants hm³ té avui dia?

[0,5 punts]

$$0,28 \cdot 250 = 70 \text{ hm}^3$$

b) Si no plou, es calcula que cada mes que passa perd una cinquena part de l'aigua que conté, i per tant en conserva les quatre cinques parts. Quants hm³ tindrà d'aquí a 1 mes? I d'aquí a 2 mesos?

[0,5 punts]

$$\frac{4}{5} \cdot 70 = 0,8 \cdot 70 = 56 \text{ hm}^3 \text{ i } 0,8 \cdot 56 = 44,8 \text{ hm}^3, \text{ respectivament}$$

c) Trobeu el terme general de la progressió geomètrica que relaciona la quantitat d'aigua que té el pantà (a_n) amb els mesos que passin a partir d'avui (n).

[0,5 punts]

$$a_n = 70 \cdot 0,8^n$$

d) Es considera una situació molt crítica quan el pantà es troba per sota de 15 hm³. Quants mesos han de passar, aproximadament, per a què arribi a aquesta situació, si no plou?

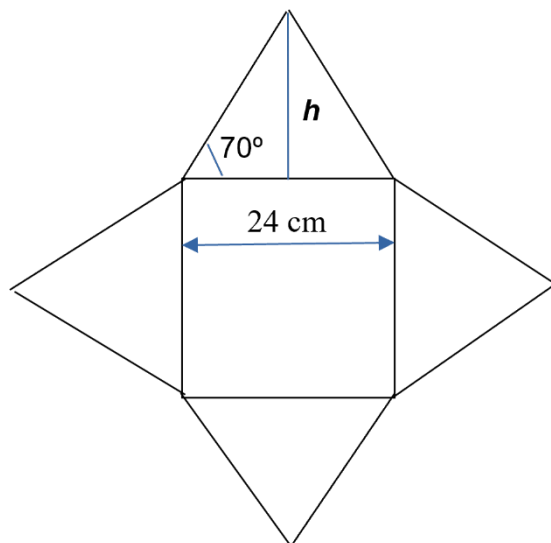
[0,5 punts]

Ho poden fer per aproximació, sense haver de resoldre l'equació exponencial.

$$a_6 = 70 \cdot 0,8^6 = 18,35 \text{ hm}^3 \quad a_7 = 70 \cdot 0,8^7 = 14,68 \text{ hm}^3$$

A partir del 7è mes aproximadament.

3. Calculeu l'àrea de l'estrella següent, formada per un quadrat i 4 triangles isòsceles iguals (trobeu prèviament l'altura del triangle).
[2 punts: 1 punt per l'altura del triangle i 1 punt per l'àrea]



$$\begin{aligned}\text{Altura triangle: } \operatorname{tg} 70^\circ &= \frac{h}{12} \quad h = 12 \cdot \operatorname{tg} 70^\circ = 32,97 \text{ cm} \\ A_{\text{triangle}} &= \frac{24 \cdot 32,97}{2} = 395,64 \text{ cm}^2 \\ A_{\text{quadrat}} &= 24^2 = 576 \\ A_{\text{total}} &= 576 + 4 \cdot 395,64 = 2.158,56 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

4. Les persones A, B i C són tres inversores que van fundar una empresa, els beneficis de la qual es reparteixen, en funció de la quantitat inicial que va invertir cadascuna, de la manera següent: B rep el doble de beneficis que C, i A rep tants beneficis com C i B juntes. Si aquest any hi ha hagut 42 milions d'euros de benefici, quina part s'emporta cadascuna?
[2 punts: 0,75 punts pel plantejament i 1,25 punts per la resolució]

x = beneficis Sr A, y = beneficis Sr B i z = beneficis Sr C

$$\begin{aligned}\begin{cases} y = 2z \\ x = y + z \\ x + y + z = 42 \end{cases} \\ x = 2z + z = 3z \\ 3z + 2z + z = 42 \quad 6z = 42 \quad z = 7 \text{ milions} \\ y = 2 \cdot 7 = 14 \text{ milions} \\ x = 3 \cdot 7 = 21 \text{ milions}\end{aligned}$$

5. Considereu els punts A(-2 , 5) i B(1 , 2) i la recta que passa pels dos.
a) Trobeu el vector director de la recta.
[0,5 punts]

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (1 - (-2), 2 - 5) = (3, -3)$$

- b) Trobeu l'equació de la recta en forma contínua ($\frac{x-a}{v_1} = \frac{y-b}{v_2}$) i en forma explícita ($y = mx + n$).
[1 punt]

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{-3}$$

$$-3(x-1) = 3(y-2) \quad -3x+3 = 3y-6 \quad -3x+9 = 3y \quad y = -x+3$$

- c) Trobeu els punts de tall de la recta amb els eixos de coordenades.
[0,5 punts]

Eix X: $y = 0, -x + 3 = 0 \quad x = 3$
Eix Y: $x = 0 \quad y = -0 + 3 = 3$

6. Considereu la funció polinòmica $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 5$.

- a) Quin és el grau i el terme independent d'aquesta funció polinòmica?
[0,5 punts]

El grau és 3 o de tercer grau i el terme independent és 5.

- b) Trobeu les imatges per a $x = 2$ i per a $x = -3$.
[0,75 punts]

$$f(2) = 2^3 - 2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 5 = 8 - 8 - 6 + 5 = -1$$

$$f(-3) = (-3)^3 - 2 \cdot (-3)^2 - 3 \cdot (-3) + 5 = -27 - 18 + 9 + 5 = -31$$

- c) Trobeu les antiimatges de 5.
[0,75 punts]

$$x^3 - 2x^2 - 3x + 5 = 5$$

$$x^3 - 2x^2 - 3x = 0 \quad x(x^2 - 2x - 3) = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 2x - 3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$f^{-1}(5) = 0, -1, 3$$

7. En un equip de bàsquet s'ha analitzat el joc de dos dels seus millors jugadors en els darrers vuit partits, i se n'han recollit les puntuacions obtingudes en la taula següent.

<i>Jugador A</i>	12	23	16	7	24	5	19	20
<i>Jugador B</i>	15	16	20	10	13	12	19	13

- a) Calculeu la mitjana de punts i la desviació típica per a cada jugador en aquests vuit partits.
[1,5 punts]

$$\bar{x}_A = \frac{12 + 23 + 16 + 7 + 24 + 5 + 19 + 20}{8} = \frac{126}{8} = 15,75$$

$$\bar{x}_B = \frac{15 + 16 + 20 + 10 + 13 + 12 + 19 + 13}{8} = \frac{118}{8} = 14,75$$

$$\sigma_A^2 = \frac{12^2 + 23^2 + 16^2 + 7^2 + 24^2 + 5^2 + 19^2 + 20^2}{8} - 15,75^2 = \frac{2340}{8} - 15,75^2 = 44,4375$$

$$\sigma_A = \sqrt{44,4375} = 6,67$$

$$\sigma_B^2 = \frac{15^2 + 16^2 + 20^2 + 10^2 + 13^2 + 12^2 + 19^2 + 13^2}{8} - 14,75^2 = \frac{2340}{8} - 14,75^2$$

$$= 10,4375$$

$$\sigma_B = \sqrt{10,4375} = 3,23$$

b) Quin és el jugador amb millor puntuació?

[0,25 punts]

El jugador amb millor puntuació és el jugador A, ja que té la mitjana més alta.

c) Quin és el jugador més regular?

[0,25 punts]

El jugador més regular és el jugador B, ja que té la desviació típica més baixa.

