Unitat 1

PROBABILITAT

què treballaràs?

En acabar la unitat has de ser capaç de:

- **Precisar els diferents tipus d'esdeveniments que poden ser estudiats en un experiment aleatori.**
- **Identificar l'espai mostral d'un experiment aleatori.**
- **Explicar les lleis dels grans nombres.**
- **Interpretar la probabilitat com a valor numèric.**
- **Quantificar la probabilitat dels esdeveniments en experiments aleatoris simples.**
- **Quantificar la probabilitat dels esdeveniments en experiments aleatoris compostos.**
- **Quantificar la probabilitat de la unió de dos esdeveniments**
- **Quantificar la probabilitat de l'esdeveniment contrari.**

1. Esdeveniments

Un dia qualsevol surts de casa al matí i agafes l'autobús. Duus monedes de diferents valors a la butxaca i en treus una a l'atzar per pagar el bitllet. Segons la moneda que treguis n'hi haurà prou o no per a pagar-lo. Quan vegis quina moneda és ho sabràs. Aquesta situació, com moltes d'altres que podríem trobar en el dia a dia, la podem considerar un experiment en què hi ha diversos resultats o esdeveniments possibles. En aquesta unitat estudiarem quines són les regles que determinen els resultats en aquests experiments. Començarem definint alguns termes.

Experiment aleatori

En el cas de treure una moneda de la butxaca a l'atzar, i en d'altres semblants en què cal dur a terme l'experiència per a saber-ne el resultat, parlem **d'experiment aleatori**.

Vegem-ne altres exemples:

Exemple 1 Tirar un dau i observar el nombre que surt.

Exemple 2 Agafar una carta d'una baralla espanyola i observar quina carta surt.

Exemple 3 Jugar a la ruleta i observar el nombre on cau la bola.

Espai mostral

Quan llancem una moneda enlaire pot ser que surti cara o creu. Aquests són els resultats possibles **(esdeveniments elementals)** de l'experiment aleatori i constitueixen el que s'anomena **espai mostral**. L'espai mostral se simbolitza amb la lletra E. En aquest cas E = {cara, creu}.

Els espais mostrals dels experiments aleatoris descrits en els exemples de l'apartat anterior són els següents:

Exemple 1 $E = \{1,2,3,4,5,6\}$

Exemple 2 E = {totes les cartes}

Exemple 3 $E = \{0,1,2,3,\ldots\ldots,36\}$

Esdeveniment

En el llançament d'un dau hi ha sis possibles resultats ($E = \{1,2,3,4,5,6\}$). Dins d'aquest espai mostral podem fer diferents subconjunts, per exemple:

$$A = \{1\} \qquad B = \{3,4\} \qquad C = \{1,2,3,5\}$$

Se'n poden fer molts d'altres. Cada un és un esdeveniment.

Un **esdeveniment** és qualsevol subconjunt de l'espai mostral.

Ara definirem alguns tipus d'esdeveniments amb un exemple que en clarifiqui la definició. Tots els exemples fan referència a l'experiment aleatori de tirar un dau i observar quin nombre surt. Com ja hem dit, en aquest experiment aleatori $E = \{1,2,3,4,5,6\}$.

Esdeveniment elemental

És format per un sol element de l'espai mostral.

Exemple A = que surti el número 1 A = {1}

Esdeveniment compost

És format per l'agrupació de dos o més esdeveniments elementals de l'espai mostral.

Exemple B = que surti un nombre imparell B = {1,3,5}

Esdeveniment segur

És format per tot l'espai mostral. Sempre succeeix.

Exemple D = que surti un nombre de l'1 al 6 D = {1,2,3,4,5,6}

Esdeveniment impossible

No és dins de l'espai mostral.

Exemple F = que surti el 8 F = Ø

Esdeveniments compatibles

Quan llancem un dau pot ser que el nombre que surti sigui imparell i primer alhora. Els esdeveniments imparell i primer són compatibles, atès que els nombres 1, 3 i 5 són imparells i primers:

Imparell A = {1,3,5}

Primer B = {1,2,3,5}

Diem que dos o més experiments són compatibles quan es poden produir alhora en fer un experiment aleatori.

Esdeveniments incompatibles

Quan llancem el dau, no pot ser que el nombre que surti sigui parell i imparell alhora. Diem que els esdeveniments parell (A = {2,4,6}) i imparell (B = {1,3,5}) són incompatibles.

Diem que dos esdeveniments són incompatibles quan no es poden produir alhora en fer un experiment aleatori.

Esdeveniment contrari

Si considerem l'esdeveniment «que surti el cinc» (A = {5}), l'esdeveniment contrari és que no surti el cinc ($\bar{A}$ = {1,2,3,4,6}).

Així, doncs, l'esdeveniment contrari és el format per tots els elements de l'espai mostral que no formen part de l'esdeveniment en consideració. L'esdeveniment contrari se simbolitza per la mateixa lletra que l'esdeveniment en consideració amb un guió a sobre ($\bar{A}$).

• **Activitats d'aprenentatge 1, 2 i 3**

2. Probabilitat d'un esdeveniment

Si llances una moneda enlaire, tant pot sortir cara com creu. Intuïtivament podem dir que els esdeveniments cara i creu tenen la mateixa **probabilitat**. Però, com és defineix i com s'expressa matemàticament aquesta probabilitat?

Lleis dels grans nombres

Amb la finalitat d'arribar al concepte de probabilitat, introduirem les lleis dels grans nombres. Prendrem com a exemple l'experiment aleatori de llançar una moneda enlaire i observar si surt cara o creu. Aquest experiment l'arribarem a repetir fins a deu mil cops.

Primera llei dels grans nombres

Abans de començar l'experiment, recordem que:

$$fr = \frac{fa}{n}$$

n = nombre d'experiments efectuats

fa= freqüència absoluta de l'esdeveniment, és el nombre de vegades que es produeix un determinat esdeveniment.

fr = freqüència relativa de l'esdeveniment, és el resultat de dividir fa entre n. Ens indica la relació entre el nombre de vegades que es produeix un esdeveniment i el nombre d'experiments efectuats.

En l'experiment aleatori de llançar una moneda enlaire, si calculem la **fa** i la **fr** de l'esdeveniment cara, ens podem trobar que en els primers llançaments la fr oscil·li molt. Si comencessin sortint tres cares i després una creu, tindríem:

n	fa cara	fr cara
1	1	$\frac{1}{1} = 1$
2	2	$\frac{2}{2} = 1$
3	3	$\frac{3}{3} = 1$
4	3	$\frac{3}{4} = 0{,}75$

Però després de trenta llançaments, el nombre de cares i creus s'haurà anat equilibrant.

n	fa cara	fr cara
30	12	$\frac{12}{30} = 0{,}4$
100	55	$\frac{55}{100} = 0{,}55$

Un cop fets 100 llançaments, l'equilibri serà més gran.

Podríem obtenir aquests resultats:

n	fa cara	fr cara
10.000	4.970	$\frac{4.970}{10.000} = 0{,}497$

Un cop fets els 10.000 llançaments, podríem obtenir:

Si repetim cada dia aquesta mateixa experiència, veurem que la **fr** després dels 10.000 llançaments serà sempre al voltant de 0,5. La **probabilitat** és aquest nombre cap al qual tendeix la freqüència relativa d'un esdeveniment quan el nombre d'experiments aleatoris és molt gran.

Podem dir que la probabilitat de l'esdeveniment cara és 0,5:

$$p(cara) = 0{,}5$$

Això coincideix amb la idea intuïtiva que la meitat de vegades sortirà cara i l'altra meitat creu.

Segona llei dels grans nombres

En el llançament d'una moneda enlaire esperem que la meitat de cops surti cara. Malgrat que la tendència és aquesta, sempre hi ha una diferència entre el que esperem (**fa** esperada) i el que realment succeeix (**fa** observada). A més, el valor absolut d'aquesta diferència tendeix a augmentar quan augmenta el nombre de llançaments (**n**):

n	Fa observada	fa esperada	|fa obs-fa esp|
2	2	1	1
4	3	2	1
30	12	15	3
100	55	50	5
10.000	4,970	5.000	30

Així, doncs, en augmentar **n**, la **fr** tendeix a un nombre (la probabilitat) i la diferència entre les **fa** observada i esperada tendeix a créixer.

• **Activitats d'aprenentatge 4, 5 i 6**

Regla de Laplace

Quan llancem una moneda enlaire, tant pot sortir cara com creu, els dos resultats possibles (cara i creu) tenen la mateixa probabilitat. Si estudiem l'esdeveniment cara, podem dir que dels dos resultats possibles (cara i creu) n'hi ha un que és favorable al fet que es produeixi l'esdeveniment (cara).

En aquest cas podem calcular la probabilitat a partir de la fórmula:

$$\boxed{p = \frac{\text{Nombre Casos Favorables}}{\text{Nombre Casos Possibles}}}$$

En l'exemple de la moneda, la probabilitat que surti cara és:

$$p(\text{cara}) = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

Quan els esdeveniments elementals de l'espai mostral tenen la mateixa probabilitat, la probabilitat d'un esdeveniment és el quocient entre els casos favorables a l'esdeveniment i els casos possibles. Aquesta és l'anomenada **regla de Laplace**.

A continuació veurem alguns exemples més de com s'utilitza. En alguns es parla de la baralla de cartes espanyoles i del joc de la ruleta. Farem uns aclariments per a qui no estigui familiaritzat amb aquests jocs:

Baralla de cartes espanyoles

Conté 48 cartes dividides en quatre grups anomenats plcollss: oros, bastos, copes i espases. Cada pal coll conté 12 cartes numerades de l'1 al 12. Les tres darreres (10, 11 i 12) s'anomenen figures perquè hi tenen representat un personatge. El 10 s'anomena sota, l'11 és el cavall i el 12 el rei.

Joc de la ruleta

En el joc de la ruleta una bola va a parar aleatòriament a un número del 0 al 36. El número 0 és de color blanc. Dels 36 restants, 18 són vermells i 18 són negres.

Experiment aleatori	Espai mostral	Esdeveniment d'estudi	Regla de Laplace
Tirar un dau	E={1,2,3,4,5,6}	A=número 6 A={6}	p(A)= $\frac{1}{6}$ =0,17
Tirar un dau	E={1,2,3,4,5,6}	A=nombre parell	p(A)= $\frac{3}{6}$ =0,5
Tirar un dau	E={1,2,3,4,5,6}	A=número menor que 7 A={1,2,3,4,5,6}	p(A)= $\frac{6}{6}$ =1
Agafar una carta de la baralla esp.	E={Totes les cartes}	A= que surti una una figura A={les 12 figures}	p(A) = $\frac{12}{48}$ = 0,25
Agafar una carta de la baralla esp.	E={Totes les cartes}	A= que surti un 8 A={8or,8bast,8cop, 8esp)	p(A) = $\frac{4}{48}$ = 0,08
Jugar a la ruleta	E={0,1,2,..........36}	A= número 0 A={0}	p(A) = $\frac{1}{37}$ = 0,03
Jugar a la ruleta	E={0,1,2,...........36}	A=nombre divisible per 5 A={5,10,15,20,25,30,35}	p(A) = $\frac{7}{37}$ = 0,19
Jugar a la ruleta	E={0,1,2,...........36}	A=que surti un núm. menor que 40 A={0,1,2,...........36}	p(A)= $\frac{37}{37}$ = 1

Propietats de la probabilitat

Valor numèric de la probabilitat

La probabilitat d'un esdeveniment és sempre un nombre entre 0 i 1. Això és clar, ja que el nombre de casos favorables no pot sobrepassar mai el nombre de casos possibles i, per tant, el quocient entre nombre de casos favorables i nombre de casos possibles donarà sempre un valor numèric entre 0 i 1.

La probabilitat pot expressar-se també en forma de fracció, la qual cosa s'utilitza sovint quan el denominador és petit (1/2, 3/4, 7/10,...). Cal dir que la forma fraccionària és especialment interessant quan el quocient entre numerador i divisor no és un nombre decimal exacte (2/3, 2/9,...). Ara bé, quan el denominador és un nombre gran, és preferible el valor numèric entre 0 i 1. Així, doncs, no parlarem d'una probabilitat de 254/391, sinó d'una probabilitat de 0,65, ja que és molt més entenedor.

Encara hi ha una altra manera d'expressar la probabilitat: el tant per cent, que és la més popular d'expressar-la. Tanmateix, nosaltres no la utilitzarem, atès que generalment no és la manera en què les matemàtiques expressen la probabilitat.

Així, doncs, quan llancem una moneda enlaire, són expressions equivalents:

$$p(\text{cara}) = 0{,}5$$
$$p(\text{cara}) = \frac{1}{2}$$
$$p(\text{cara}) = 50\%$$

Suma de les probabilitats dels esdeveniments de l'espai mostral

Quan llancem una moneda enlaire, l'espai mostral té dos esdeveniments elementals (E = {cara, creu}), cada un dels quals té una probabilitat de 0,5. Si sumem les probabilitats dels dos esdeveniments elementals:

$$p(\text{cara}) + p(\text{creu}) = 0{,}5 + 0{,}5 = 1$$

En un experiment aleatori, la suma de les probabilitats de tots els esdeveniments elementals de l'espai mostral és sempre igual a 1.

Podem dir doncs que la probabilitat de l'esdeveniment segur (el format per tot l'espai mostral) és 1 i, complementàriament, la probabilitat de l'esdeveniment impossible és 0.

Probabilitat d'un esdeveniment compost

En l'experiment aleatori de tirar un dau la probabilitat que surti un nombre parell és igual a la suma de probabilitats que surti un 2, un 4 i un 6. Així, doncs:

$$p(\text{Nombre Parell}) = p(2) + p(4) + p(6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

La probabilitat d'un esdeveniment compost és sempre igual a la suma de les probabilitats dels esdeveniments elementals que el formen.

Fixem-nos que el resultat obtingut és el mateix que el que obtindríem aplicant la regla de Laplace:

$$p(\text{NombreParell}) = \frac{\text{Nombre Casos Favorables}}{\text{Nombre Casos Possibles}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

Probabilitat de la unió de dos esdeveniments

En el càlcul de la probabilitat de l'esdeveniment unió (el que obtenim de la unió de dos esdeveniments) distingim dos casos: la unió d'esdeveniments incompatibles i la unió d'esdeveniments compatibles.

En tots dos casos la notació matemàtica de la probabilitat de l'esdeveniment unió dels esdeveniments A i B és **p(AUB)**.

El signe **U** significa **unió** i el podem transcriure per la lletra **o**. Per tant, l'expressió p(AUB) la podem llegir:

- probabilitat de A unió B, o sia probabilitat de la unió dels esdeveniments A i B
- probabilitat de A o B, o sia probabilitat que l'esdeveniment sigui A o B.

Esdeveniments incompatibles

Si fem l'experiment aleatori de tirar un dau i mirar quin nombre surt i considerem els esdeveniments A = {1,2,3} i B = {6}, la probabilitat de l'esdeveniment unió serà el resultat de sumar les probabilitats dels experiments A i B:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} = 0{,}67$$

Fixa't que A i B són incompatibles, és a dir, no es poden produir alhora.

Quan els esdeveniments són incompatibles, la probabilitat de la unió és igual a la suma de les probabilitats dels dos esdeveniments:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

Esdeveniments compatibles

Fem ara l'experiment aleatori de tirar un dau i mirar quin nombre surt i considerem els esdeveniments A = {1, 3, 5} i B = {2, 3, 4, 5}. Aquí A i B són compatibles, ja que contenen esdeveniments elementals comuns: el 3 i el 5.

En aquest cas la probabilitat de l'esdeveniment unió serà:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{3}{6} + \frac{4}{6} - \frac{2}{6} = \frac{5}{6} = 0{,}83$$

El signe $\cap$ significa intersecció. L'expressió $p(A \cap B)$ la podem llegir: probabilitat de A intersecció B, o sia probabilitat del conjunt d'elements que pertanyen a A i a B alhora. En aquest cas és la probabilitat del conjunt {3, 5}, la qual, aplicant-hi la regla de Laplace és $\frac{2}{6}$ ($p(A \cap B) = \frac{2}{6}$).

Quan dos esdeveniments són compatibles, la probabilitat de la unió és igual a la suma de les probabilitats dels dos esdeveniments menys la probabilitat de la seva intersecció:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

Probabilitat de l'esdeveniment contrari

Si fem l'experiment aleatori de tirar un dau i mirar quin nombre surt i considerem l'esdeveniment que surti un 6 ($\bar{A}$= {6}), la probabilitat de l'esdeveniment contrari que no surti un 6 ($\bar{A}$ = {1,2,3,4,5} serà 1 menys la probabilitat de A:

$$p(\tilde{A}) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6} = 0{,}83$$

On $\bar{A}$ és l'esdeveniment contrari de A.

Efectivament, la probabilitat de l'esdeveniment que no surti un 6 és la probabilitat de l'esdeveniment que surti un 1, un 2, un 3, un 4 o un 5, que és de 5/6.

La probabilitat d'un esdeveniment contrari d'un esdeveniment A és igual a 1 menys la probabilitat de l'esdeveniment A:

$p(\bar{A}) = 1 - p(A)$

Complementàriament:

$p(A) = 1 - p(\bar{A})$

- **Activitats d'aprenentatge 7, 8, 9 i 10**

3. Experiments aleatoris compostos

Un experiment aleatori compost és format per dos o més experiments aleatoris simples. Tirar un dau és un experiment aleatori simple. Tirar dos cops un dau és un experiment aleatori compost format per dos experiments aleatoris simples (tirar un dau).

Espai mostral

Si tires un dau, ja saps que hi ha 6 resultats possibles que formen l'espai mostral (E = {1, 2, 3, 4, 5, 6}). Si tires dos cops un dau, intuïtivament ja saps que hi ha molts més resultats possibles (un 1 i un 4, un 3 i un 5, dos cops el 6, etc.). Però, quants i quins resultats possibles hi ha en aquest experiment aleatori compost? Per a saber-ho cal obtenir l'espai mostral. Ara aprendrem a obtenir l'espai mostral en aquests experiments aleatoris compostos. Veurem dos mètodes: el diagrama d'arbre i les taules.

Diagrama d'arbre

És un tipus de diagrama que recorda l'estructura d'un arbre, des del tronc principal fins a les darreres branques. Veurem el seu funcionament per mitjà de l'exemple de tirar dos cops un dau.

El resultat del primer llançament pot ser 1, 2, 3, 4, 5 o 6, la qual cosa generarà sis branques alhora de fer el diagrama (una per a cada esdeveniment possible).

Si el resultat del primer llançament és un 1, en el segon llançament pot sortir una altra vegada un 1, 2, 3, 4, 5 o 6. Això generarà sis branques més. Passarà el mateix si el resultat del primer llançament és un 2, 3, 4, 5 o 6.

El diagrama d'arbre quedarà així: com observes en la pàgina següent

L'espai mostral és el resultat d'anar seguint, d'esquerra a dreta, tots els itineraris possibles.

L'espai mostral és, doncs:

E={1-1, 1-2, 1-3, 1-4, 1-5, 1-6, 2-1, 2-2, 2-3, 2-4, 2-5, 2-6, 3-1, 3-2, 3-3, 3-4, 3-5, 3-6, 4-1, 4-2, 4-3, 4-4, 4-5, 4-6, 5-1, 5-2, 5-3, 5-4, 5-5, 5-6, 6-1, 6-2, 6-3, 6-4, 6-5, 6-6}

Tirar dos daus alhora i considerar els resultats del dau 1 i del dau 2 seria equivalent.

Vegem ara dos exemples més:

Primer llançament	segon llançament	espai mostral
1	1	1-1
	2	1-2
	3	1-3
	4	1-4
	5	1-5
	6	1-6
2	1	2-1
	2	2-2
	3	2-3
	4	2-4
	5	2-5
	6	2-6
3	1	3-1
	2	3-2
	3	3-3
	4	3-4
	5	3-5
	6	3-6
4	1	4-1
	2	4-2
	3	4-3
	4	4-4
	5	4-5
	6	4-6
5	1	5-1
	2	5-2
	3	5-3
	4	5-4
	5	5-5
	6	5-6
6	1	6-1
	2	6-2
	3	6-3
	4	6-4
	5	6-5
	6	6-6

Exemple 1

Considerem l'experiment aleatori compost extreure una bola d'una bossa on hi ha dues boles blanques i una bola negra, mirar de quin color és, tornar-la a la bossa i extreure'n una altra.

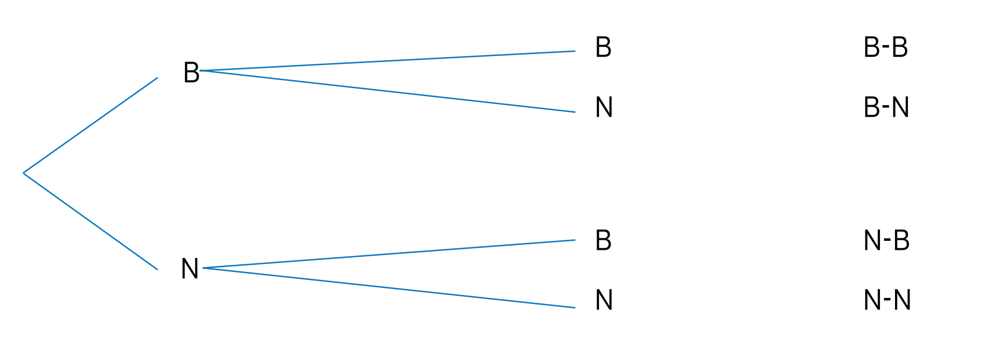
El resultat de la primera extracció pot ser una bola blanca (B) o una bola negra (N), la qual cosa generarà dues branques a l'hora de fer el diagrama (una per a cada esdeveniment possible).

Si el resultat de la primera extracció és una bola blanca, en fer la segona extracció pot passar que surti de nou una bola blanca o una de negra. Això generarà dues branques més. Passarà el mateix si el resultat de la primera extracció és una bola negra.

El diagrama d'arbre quedarà així:

Utilitzem els símbols **B** i **N** per a bola blanca i bola negra respectivament.

Primera extracció **segona extracció** **espai mostral**



L'espai mostral és, doncs: E={B-B, B-N, N-B, N-N}

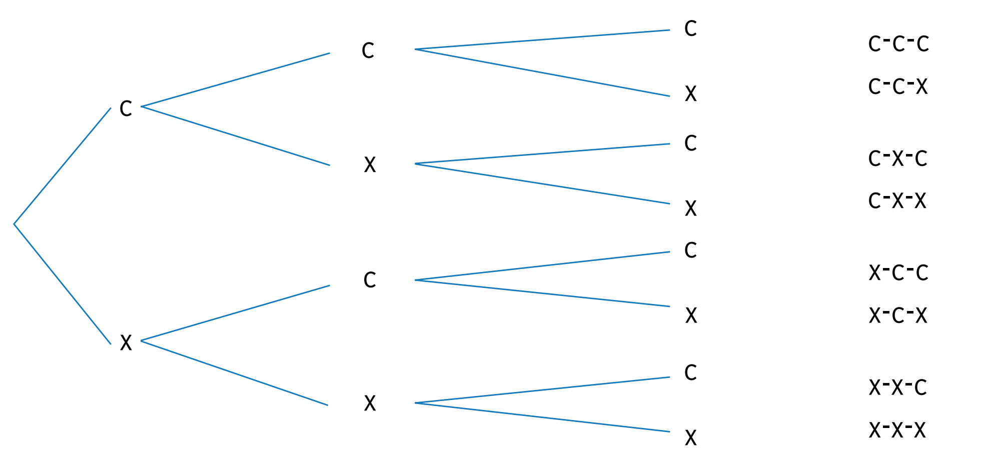
Exemple 2

Considerem l'experiment aleatori tirar llançar tres cops una moneda enlaire.

El diagrama d'arbre és aquest:

Utilitzem els símbols **c** per cara i **x** per a creu.

Primer llançament **segon llançament** **tercer llançament** **espai mostral**



L'espai mostral és, doncs: E={c-c-c, c-c-x, c-x-c, c-x-x, x-c-c, x-c-x, x-x-c, x-x-x}

Taules

Ara veurem com es pot obtenir l'espai mostral a partir de taules. Per a fer-ho utilitzarem de nou l'experiment aleatori compost tirar dos cops un dau.

Aquesta vegada els possibles resultats de cada llançament els posarem en una taula de doble entrada:

		segon llançament					
		1	2	3	4	5	6
primer llançament	1						
	2						
	3						
	4						
	5						
	6						

Ara només cal encreuar els possibles resultats de cada llançament per a obtenir l'espai mostral:

		segon llançament					
		1	2	3	4	5	6
primer llançament	1	1-1	1-2	1-3	1-4	1-5	1-6
	2	2-1	2-2	2-3	2-4	2-5	2-6
	3	3-1	3-2	3-3	3-4	3-5	3-6
	4	4-1	4-2	4-3	4-4	4-5	4-6
	5	5-1	5-2	5-3	5-4	5-5	5-6
	6	6-1	6-2	6-3	6-4	6-5	6-6

L'espai mostral és, doncs:

E={1-1, 1-2, 1-3, 1-4, 1-5, 1-6, 2-1, 2-2, 2-3, 2-4, 2-5, 2-6, 3-1, 3-2, 3-3, 3-4, 3-5, 3-6, 4-1, 4-2, 4-3, 4-4, 4-5, 4-6, 5-1, 5-2, 5-3, 5-4, 5-5, 5-6, 6-1, 6-2, 6-3, 6-4, 6-5, 6-6}

Vegem ara dos exemples més:

Exemple 1

Tornem a considerar l'experiment aleatori extreure una bola d'una bossa on hi ha dues boles blanques i una bola negra, mirar de quin color és, tornar-la a la bossa i extreure'n una altra.

Fem la taula:

	segona extracció		
primera extracció		**B**	**N**
	B	B-B	B-N
	N	N-B	N-N

L'espai mostral és, doncs: E={B-B, B-N, N-B, N-N}

Exemple 2

Considerem una altra vegada l'experiment aleatori tirar tres cops una moneda enlaire.

En aquest cas, com que són tres llançaments, haurem de fer dues taules.

La primera taula l'elaborarem de la manera que ja coneixem:

	segon llançament		
primer llançament		**c**	**x**
	c	c-c	c-x
	x	x-c	x-x

	tercer llançament		
espai mostral primer i segon llançament		**c**	**x**
	c-c	c-c-c	c-c-x
	c-x	c-x-c	c-x-x
	x-c	x-c-c	x-c-x

La segona taula la confeccionarem a partir de l'espai mostral obtingut en la primera taula E = {c-c, c-x, x-c, x-x}, que fa referència als dos primers llançaments:

L'espai mostral és, doncs:

E={c-c-c, c-c-x, c-x-c, c-x-x, x-c-c, x-c-x, x-x-c, x-x-x}

Probabilitat d'esdeveniments independents en experiments aleatoris compostos

El càlcul de la probabilitat en aquests tipus d'esdeveniments ens serà especialment útil en la resolució de problemes de genètica (unitats 2 i 3).

Experiments elementals equiprobables

Si llancem dos cops una moneda, és igualment probable:

- que surtin dues cares
- que surtin dues creus
- que surti primer una cara i després una creu
- que surti primer una creu i després una cara

Tots els esdeveniments de l'espai mostral (E = {c-c, x-x, c-x, x-c}) tenen la mateixa probabilitat, es diu que són equiprobables.

En general, quan tots els esdeveniments de l'espai mostral són equiprobables, podem utilitzar dos mètodes per calcular la probabilitat: la regla de Laplace i la multiplicació de probabilitats.

Mètode 1: Regla de Laplace

Podem utilitzar la regla de Laplace de manera similar a com ho fèiem pel càlcul de la probabilitat en experiments aleatoris simples.

Quan llancem dos cops una moneda, la probabilitat que surtin dues cares és:

$$p(\text{cara-cara}) = \frac{\text{Nombre Casos Favorables}}{\text{Nombre Casos Possibles}} = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

Recorda que l'espai mostral d'aquest experiment és E = {c-c, x-x, c-x, x-c}

Mètode 2: Multiplicació de probabilitats

Podem obtenir també la probabilitat d'un determinat esdeveniment en un experiment aleatori compost, multiplicant les probabilitats dels esdeveniments en els experiments simples que el componen.

Prenent un altre cop l'experiment aleatori compost de llançar dos cops una moneda, tenim que la probabilitat que surtin dues cares és:

$$p(\text{cara-cara}) = p(\text{cara}) \cdot p(\text{cara}) = 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25$$

En general podem dir que: $p(A\text{-}B) = p(A) \cdot p(B)$

Comprovem que, evidentment, tots dos mètodes ens porten al mateix resultat.

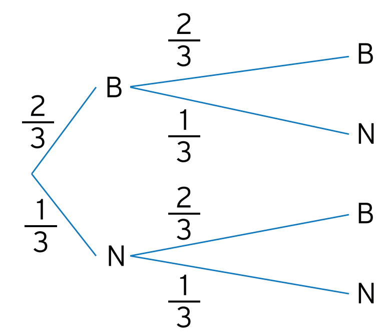
Experiments elementals no equiprobables

En el cas que els esdeveniments elementals no siguin equiprobables, l'única manera d'obtenir la probabilitat d'un determinat esdeveniment en un experiment aleatori compost és multiplicar les probabilitats dels esdeveniments en els experiments simples que el componen, seguint la fórmula abans esmentada: $p(A\text{-}B) = p(A) \cdot p(B)$.

Exemple

Considerem de nou un altre cop l'experiment aleatori compost d'extreure una bola d'una bossa on hi ha dues boles blanques i una bola negra, mirar de quin color és, tornar-la a la bossa i extreure'n una altra.

Ara farem el diagrama d'arbre posant les probabilitats dels esdeveniments que el componen sobre les branques i, al costat, hi posarem les probabilitats de tots els esdeveniments elementals.

diagrama d'arbre (**primera extracció** / **segona extracció**)	**espai mostral**	**probabilitats dels esdeveniments**
	B-B	$p(B\text{-}B) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$
	B-N	$p(B\text{-}N) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$
	N-B	$p(N\text{-}B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$
	N-N	$p(N\text{-}N) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$

Podem comprovar que la suma de les probabilitats de tots els esdeveniments elementals, com sempre, és igual a 1:

$$\frac{4}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{9}{9} = 1$$

• Activitats d'aprenentatge 11, 12, 13, 14 i 15

Probabilitats d'esdeveniments dependents en experiments aleatoris compostos. La probabilitat condicionada

Si tenim una bossa amb tres boles, dues de blanques i una de negra, i realitzem l'experiment aleatori compost d'extreure una bola i, sense tornar-la a la bossa, extreure'n una segona bola, abans de la segona extracció només quedaran dues boles a la bossa, i això farà que les probabilitats en la segona extracció canviïn:

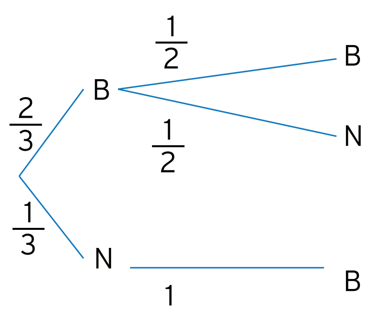
- Si en la primera extracció ha sortit una bola blanca, quedaran a la bossa una bola blanca i una de negra, de manera que la probabilitat que surti una bola blanca o bé negra en la segona extracció serà la mateixa: 0,5.
- Si en la primera extracció ha sortit una bola negra, les dues boles que resten a la bossa són blanques, per la qual cosa, en la segona extracció, segur que surt una bola blanca.

Així, doncs, en alguns experiments aleatoris compostos, les probabilitats dels esdeveniments en els experiments simples que el componen varien durant l'experiment. En aquests casos parlem d'esdeveniments dependents. Tanmateix, el mètode per calcular la probabilitat d'un determinat esdeveniment també l'obtindrem multiplicant les probabilitats dels esdeveniments en els experiments simples que el componen.

Ara fem el diagrama d'arbre posant les probabilitats dels esdeveniments que el componen sobre les branques i, al costat, hi posarem les probabilitats de tots els esdeveniments elementals.

diagrama d'arbre

primera extracció **segona extracció**



espai mostral	probabilitats dels esdeveniments
B-B	$p(B\text{-}B) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
B-N	$p(B\text{-}N) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
N-B	$p(N\text{-}B) = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}$

Podem comprovar que la suma de les probabilitats de tots els esdeveniments elementals, com sempre, és igual a 1:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$$

La probabilitat condicionada

Veiem que les probabilitats dels esdeveniments en la segona extracció estan condicionades pel resultat de la primera extracció. Si considerem, per exemple, la probabilitat que surti una bola blanca en la segona extracció, hem de considerar dos casos:

1. La probabilitat d'extreure una bola blanca en la segona extracció si s'ha tret una bola blanca en la primera extracció és 1/2, ja que només queden dues boles, una de blanca i una de negra. Això ho podem escriure així:

   $p(B/B) = \frac{1}{2}$

2. La probabilitat d'extreure una bola blanca en la segona extracció si s'ha tret una bola negra en la primera extracció és 1, ja que les dues boles que queden a la bossa són blanques. Això ho podem escriure així:

   $p(B/N) = 1$

En general, si anomenem A al primer esdeveniment i B al segon esdeveniment, escrivim p(B/A) i llegim probabilitat que es produeixi l'esdeveniment B un cop s'ha produït l'esdeveniment A.

És molt important entendre, però, que en els esdeveniments independents, les probabilitats d'un determinat esdeveniment NO està mai condicionada per resultats previs. Així doncs, en el llançament d'una moneda enlaire, la probabilitat de treure cara després d'haver tret cinc vegades creu és 0,5 (1/2).

- **Activitats d'aprenentatge 16, 17, 18 i 19**