Unitat 3

ÀREES I VOLUMS

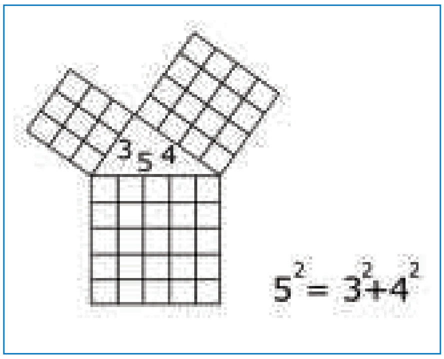
què treballaràs?

En acabar la unitat has de ser capaç de:

- **Reconèixer unitats de mesura d'una àrea.**
- **Interpretar fórmules d'àrees de figures planes.**
- **Aplicar fórmules d'àrees de figures planes.**
- **Reconèixer unitats de mesura d'un volum.**
- **Interpretar fórmules de volums de cossos geomètrics.**
- **Aplicar fórmules de volums de cossos geomètrics.**
- **Representar figures geomètriques a partir de l'enunciat d'un problema.**

1. Mesura d'àrees

En la unitat anterior vam veure la següent demostració geomètrica del teorema de Pitàgores



Observa que en aquesta demostració, els nombres 5^2, 3^2 i 4^2 representen les àrees de tres quadrats construïts sobre la hipotenusa i els catets del triangle rectangle de la figura.

Així doncs, si la longitud de la hipotenusa mesura 5 unitats, l'**àrea** del quadrat corresponent mesurarà 5^2 **unitats quadrades**.

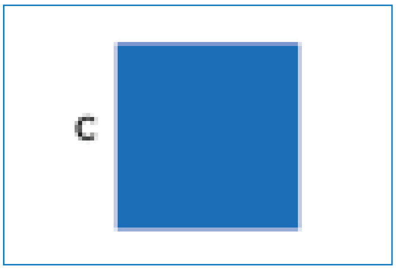
La taula següent mostra el valor de les àrees de cadascun dels quadrats anteriors segons la unitat que s'ha utilitzat per mesurar la longitud de la hipotenusa i dels catets.

UNITATS	Àrea del quadrat sobre la hipotenusa	Àrea del quadrat sobre el catet gran	Àrea de quadrat sobre el catet petit
cm	25 cm^2	16 cm^2	9 cm^2
m	25 m^2	16 m^2	9 m^2
Km	25 Km^2	16 Km^2	9 Km^2

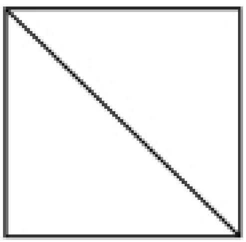
· **Activitat d'aprenentatge 1**

2. Àrea d'un quadrat

L'àrea d'un quadrat de costat c val c^2. $A = c^2$.



L'àrea del quadrat és igual al quadrat del costat.



Si dibuixem una de les diagonals d'aquest quadrat se n'obtenen dues meitats.

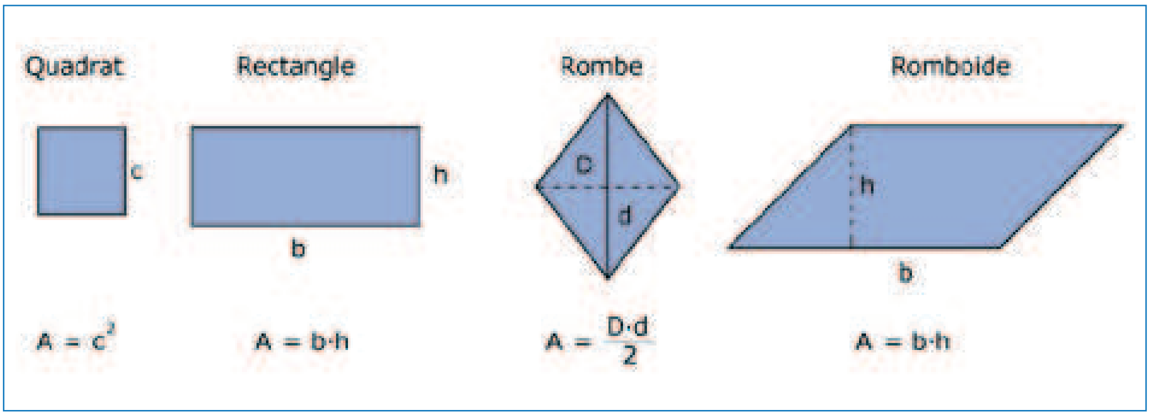
L'àrea de la meitat del quadrat valdrà la meitat de l'àrea del quadrat: $\frac{c^2}{2}$.

Fixa't que la meitat del quadrat és un triangle.

Per tant, l'àrea d'aquest triangle és $\frac{c^2}{2}$.

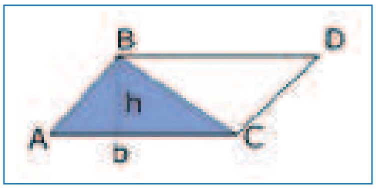
3. Àrea dels paral·lelograms

Un quadrat és un paral·lelogram. La manera com es troba l'àrea d'altres paral·lelograms és anàloga a la manera com es troba l'àrea d'un quadrat:



4. Àrea del triangle

Observa el paral·lelogram BACD de la figura. Hem traçat la diagonal BC i el paral·lelogram ha quedat dividit en dos triangles iguals, els triangles BAC i el BCD.



L'altura del paral·lelogram BACD i dels triangles BAC i el BCD és la mateixa.

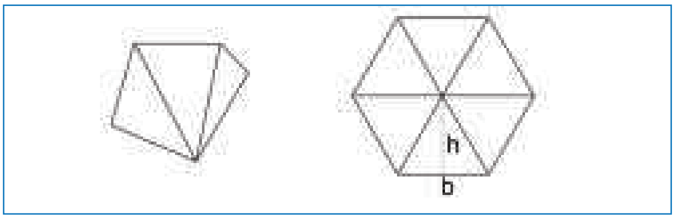
Fixa't que l'**àrea del triangle** és la meitat de l'àrea del paral·lelogram. Per tant, l'àrea del triangle és:

$$A = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{b \cdot h}{2}$$

· **Activitats d'aprenentatge 2, 3, 4, 5 i 6**

5. Àrea dels polígons

Per calcular l'àrea d'un polígon es pot recórrer a la seva triangulació. D'aquesta manera només cal calcular les àrees dels triangles que s'obtenen i sumar-les. Si el polígon és regular, els triangles que s'obtenen de la triangulació són tots iguals.



Si es vol calcular l'àrea d'un hexàgon regular només cal multiplicar per 6 l'àrea del triangle de base b i altura h:

$$\left(\frac{b \cdot h}{2}\right) \cdot 6$$

L'altura h del triangle és també l'apotema de l'hexàgon regular. D'aquesta manera la fórmula d'abans queda de la següent manera:

$$A = \frac{\text{perímetre} \cdot \text{apotema}}{2} = \frac{p \cdot a}{2}$$

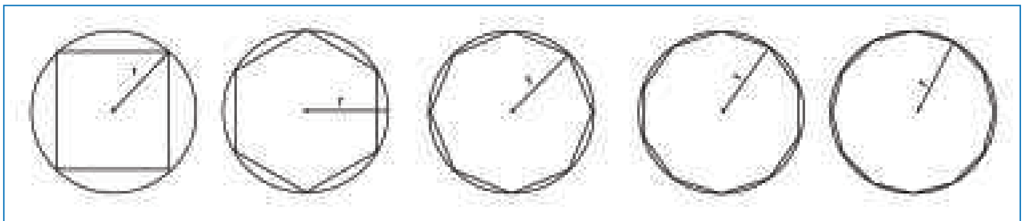
En general, l'**àrea d'un polígon regular** és la meitat del producte del perímetre per l'apotema del polígon.

· **Activitat d'aprenentatge 7.**

6. Àrea d'un cercle

Imagina't una circumferència de radi r, en la qual comencem a inscriure-hi polígons regulars cada vegada amb un nombre de costats més gran. Imagina't que pots repetir aquest procés infinites vegades. Sembla ser que cada vegada, el polígon inscrit s'acosta més a la circumferència: el perímetre del polígon seria la longitud de la circumferència i l'apotema seria el radi. Per tant, l'àrea del cercle seria l'àrea d'un polígon de perímetre la longitud de la circumferència i d'apotema el radi:

$$\text{Àrea del cercle} = \frac{\text{perímetre} \cdot \text{apotema}}{2} = \frac{\text{longitud} \cdot \text{radi}}{2}$$



Recorda que la longitud de la circumferència és $2 \cdot \pi \cdot r$

Observa que finalment obtindràs la següent fórmula per a l'**àrea del cercle**:

$$\text{Àrea del cercle} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r \cdot r}{2} = \pi \cdot r^2$$

Àrea del cercle = $\pi \cdot r^2$

· **Activitats d'aprenentatge 8, 9, 10 i 11**

7. Unitats de volum

Imagina que vols saber la quantitat de pluja que ha caigut en un metre quadrat. Per això construeixes una caixa quadrada d'un metre de llarg per un metre d'ample. T'adones que la quantitat d'aigua que ha caigut dins de la caixa assoleix una altura de 10 mm. Com que un metre són mil mil·límetres, el volum de l'aigua recollida serà:

$$V = \underbrace{10\text{ mm}}_{\text{Altura}} \cdot \underbrace{1000\text{ mm} \cdot 1000\text{ mm}}_{\text{Àrea de la caixa}} = 10.000.000\text{ mm}^3 = 10\text{ dm}^3 \text{ per metre quadrat.}$$

Fixa't en la **relació que existeix entre les unitats de volum i les de capacitat:**

Unitats de volum	**m^3**			**dm^3**			**cm^3**
Unitats de capacitat	**kl**	hl	dal	**litre**	dl	cl	**ml**

Segons aquestes equivalències podem dir que el volum total d'aigua que ha caigut ha estat de 10 litres per cada metre quadrat.

$10\text{ dm}^3 = 10$ litres

8. Àrea i volum d'un cub

Un cub té sis cares que són quadrats. Per tant, l'àrea del cub és sis vegades l'àrea d'aquest quadrat.

S'anomena **aresta** un costat comú a dues cares. En el cas del cub, l'aresta és comú a dos quadrats.

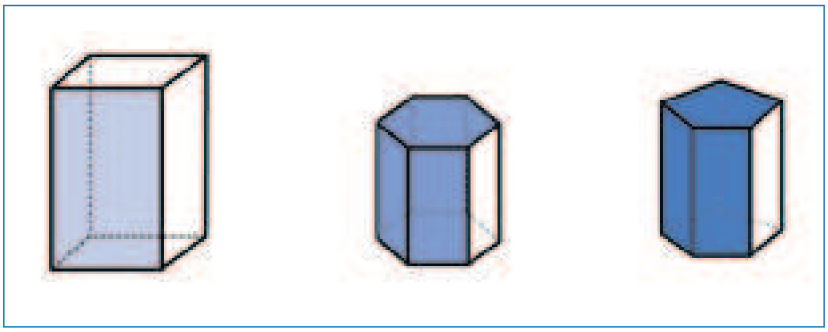
L'àrea del cub d'aresta a és $A=6a^2$.
El volum del cub d'aresta a és $V = a \cdot a \cdot a = a^3$.

9. Àrea i volum d'un ortòedre

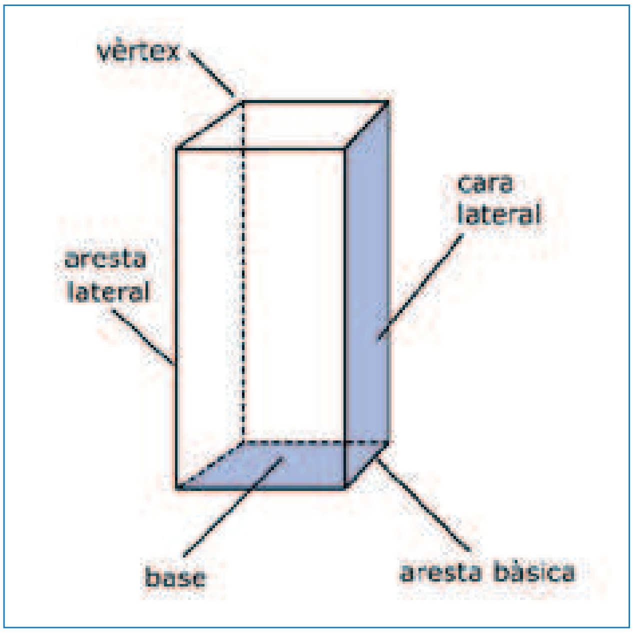
L'àrea d'un ortòedre d'arestes a, b i c és $A=2(a \cdot c) + 2(b \cdot c) + 2(a \cdot b)$
El volum d'un ortòedre d'arestes a, b i c és $V = a \cdot b \cdot c$.

10. Àrea i volum d'un prisma

Els cossos geomètrics següents són **prismes rectes**:



Els **elements d'un prisma** són:



L'àrea total (A_T) d'un prisma recte és igual a l'àrea lateral més l'àrea de les dues bases:

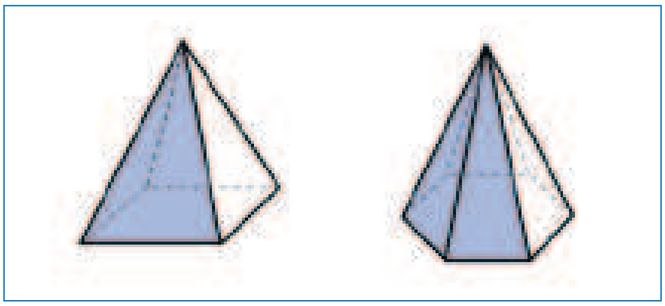
- L'àrea lateral (A_L) és igual al perímetre de la base per l'altura.
- L'àrea de la base (A_B) és l'àrea del polígon regular

Àrea total del prisma:
$A_T = A_L + 2A_B$

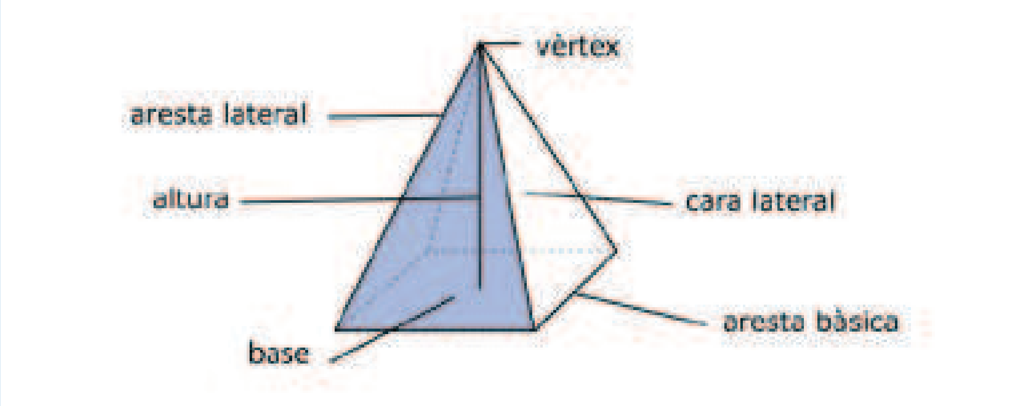
El **volum d'un prisma** és igual a l'àrea de la base per l'altura.
$V_{prisma} = A_B \cdot h$ on h és l'altura del prisma.

11. Àrea i volum d'una piràmide.

Els cossos geomètrics següents són piràmides rectes.



Els **elements d'una piràmide** són:



L'àrea total d'una piràmide recta és igual a l'àrea lateral més l'àrea de la base:

- L'àrea lateral és la suma de les àrees dels triangles que componen les cares de la piràmide.
- L'àrea de la base és l'àrea del polígon regular.

Àrea total de la piràmide:

$$A_T = A_L + A_B$$

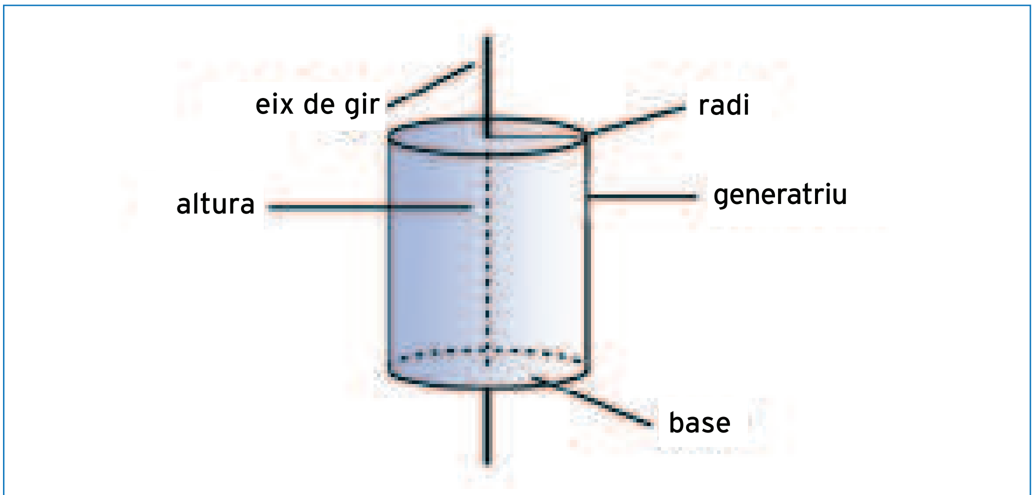
El **volum de la piràmide** és igual a un terç del producte de l'àrea de la base per l'altura de la piràmide.

$V_{\text{piràmide}} = \left(\frac{1}{3}\right) \cdot A_B \cdot h$ on h és l'altura de la piràmide.

12. Àrea i volum d'un cilindre

Dibuixa un rectangle. Imagina que el fas girar sobre un dels seus costats. Obtindràs una nova figura que és un cos de revolució anomenat **cilindre**.

Els **elements d'un cilindre** són:



L'àrea total d'un cilindre és igual a l'àrea lateral més l'àrea de les bases.

- L'àrea lateral del cilindre és:

$A_L = 2\pi R \cdot g = 2\pi Rg$ on R és el radi i g la generatriu.

- L'àrea d'una de les bases és l'àrea d'un cercle: $A_B = \pi R^2$

Àrea total del cilindre:
$$A_T = A_L + 2A_B = 2\pi Rg + 2\pi R^2$$

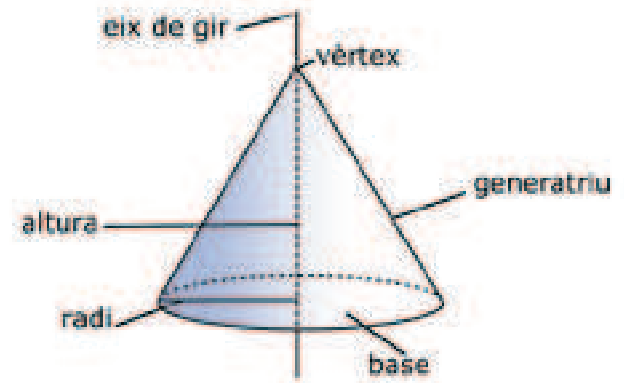
El **volum d'un cilindre** és igual al producte de l'àrea de la base per l'altura:

$V_{cilindre} = \pi R^2 \cdot h$ on h és l'altura del cilindre.

13. Àrea i volum d'un con

Dibuixa un triangle rectangle. Imagina que el fas girar sobre un dels seus catets. Obtindràs una nova figura que és un cos de revolució anomenat con.

Els elements d'un con són:



L'àrea total d'un con és igual a l'àrea lateral més l'àrea del cercle de la base.

- L'àrea lateral del con és: $A_L = \pi Rg$ on R és el radi i g la generatriu
- L'àrea del cercle és: πR^2

Àrea total del con :
$$A_T = \pi Rg + \pi R^2$$

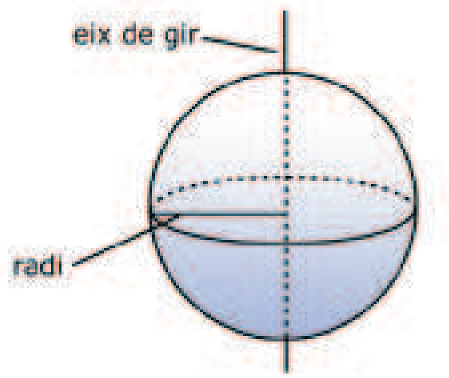
El **volum d'un con** és igual a un terç del producte de l'àrea de la base per l'altura.

$V_{con} = \left(\frac{1}{3}\right)\pi R^2 \cdot h$ on h és l'altura del con.

14. Àrea i volum d'una esfera

Imagina que fas girar un semicercle al voltant del seu diàmetre. La figura que obtindràs és un cos de revolució anomenat **esfera**.

Els elements d'una esfera són:



L'àrea d'una esfera és quatre vegades πR^2. R és el radi de l'esfera.

$$A_{esfera} = 4\pi R^2$$

El volum d'una esfera és quatre terços de πR^3.

$$V_{esfera} = \left(\frac{4}{3}\right)\pi R^3$$

- **Activitats d'aprenentatge 12, 13, 14, 15 i 16**