Unitat 1

ANGLES I TRIANGLES

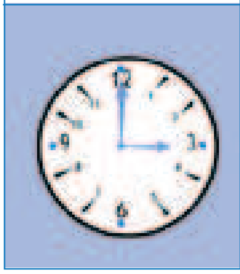
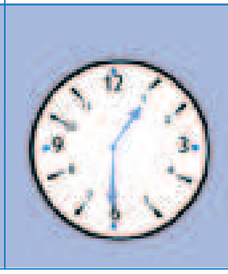
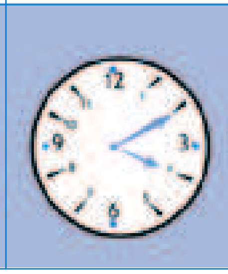
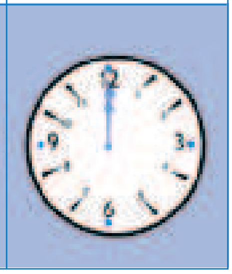
què treballaràs?

En acabar la unitat has de ser capaç de:

- Reconèixer i classificar angles.
- Utilitzar correctament el semicercle graduat o transportador d'angles.
- Operar amb angles.
- Reconèixer i construir triangles.
- Reconèixer les relacions entre els costats i els angles d'un triangle.
- Classificar triangles.
- Reconèixer i representar punts i rectes notables d'un triangle.
- Representar elements geomètrics amb símbols.
- Utilitzar correctament estris de dibuix com el regle i el compàs.

1. Angle: concepte i unitat de mesura

Observa els rellotges següents:

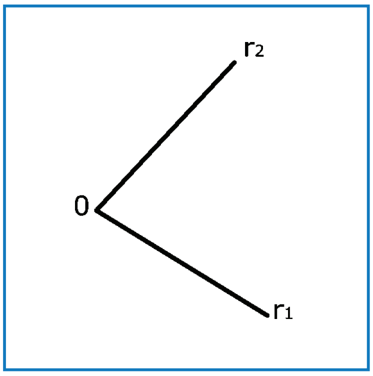
Rellotge 1	Rellotge 2	Rellotge 3	Rellotge 4
			

Cada rellotge marca una hora diferent. L'hora ve determinada per la posició de les agulles del rellotge: l'agulla petita assenyala les hores i la gran assenyala els minuts.

La posició de les agulles determina un angle entre elles.

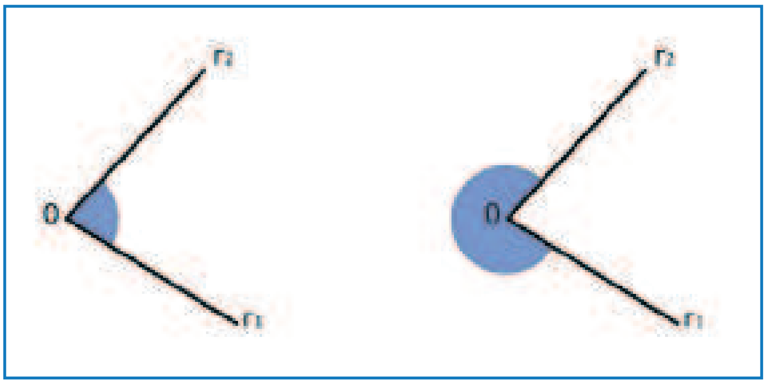
L'angle és la porció del pla formada per dues semirectes que tenen un origen comú.

En el nostre cas les dues semirectes són les agulles del rellotge i l'origen comú el seu punt d'unió. El punt en comú de les dues semirectes és el **vèrtex** de l'angle i les dues semirectes són els costats.

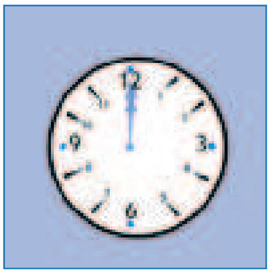


Hem utilitzat el criteri d'anomenar r_1 i r_2 a les semirectes i O al vèrtex de l'angle.

Com pots observar en la figura següent, dues semirectes amb origen comú formen dos angles.



Fixa't en el quart rellotge. Observa que l'obertura entre les dues agulles és nul·la. Però, segons el que acabem de veure, també es pot considerar com l'angle determinat per les dues agulles tota la circumferència.



El **grau sexagesimal** és la unitat que s'acostuma a fer servir per mesurar angles.

Per tant, en el primer cas, és evident que l'angle determinat per les dues agulles mesura zero graus. En canvi, en el segon cas, **el sistema sexagesimal atorga a la circumferència un valor de 360 graus.**

Així doncs, un grau correspon a una de les 360 parts iguals en què es pot dividir la circumferència.

Probablement la definició del grau sexagesimal es deu als astrònoms de l'antiga Babilònia, que dividien el cel en 360 parts, cada una de les quals corresponia a un dia de l'any (avui dia, però, diem que l'any té 365 dies). El sistema de numeració dels babilònics era un sistema sexagesimal, és a dir, un sistema de base 60. Per aquest motiu cada grau es divideix en 60 parts iguals anomenades minuts i cada minut es divideix en 60 parts iguals anomenades segons. Segur que ja t'has adonat que aquest mateix sistema és el que es fa servir per mesurar el temps. Les unitats que s'utilitzen per mesurar el temps són les hores, els minuts i els segons.

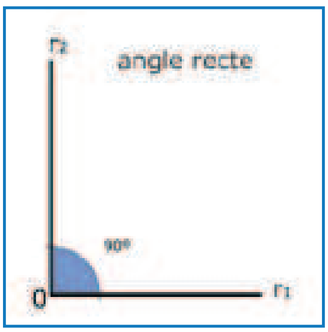
Circumferència	360º	360 graus sexagesimals
Grau sexagesimal	60′	60 minuts sexagesimals
Minut sexagesimal	60″	60 segons sexagesimals

· **Activitats d'aprenentatge 1 i 2**

2. Tipus d'angles

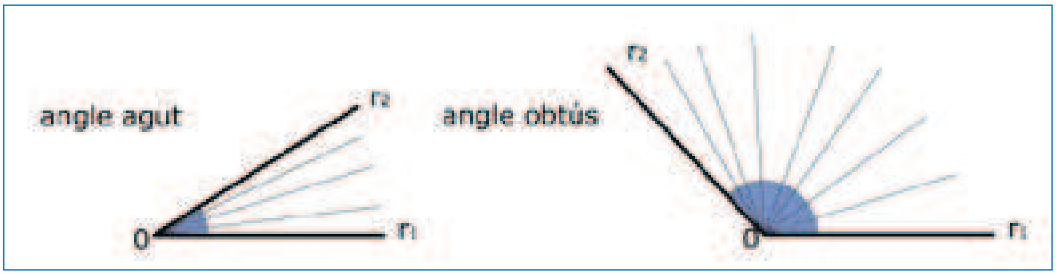
En aquesta situació la quarta part d'una circumferència mesura 90º.

Els angles que mesuren 90º s'anomenen angles **rectes**. Es formen quan les dues semirectes són perpendiculars.



Fixa't que en el primer rellotge hi ha representat un angle recte.

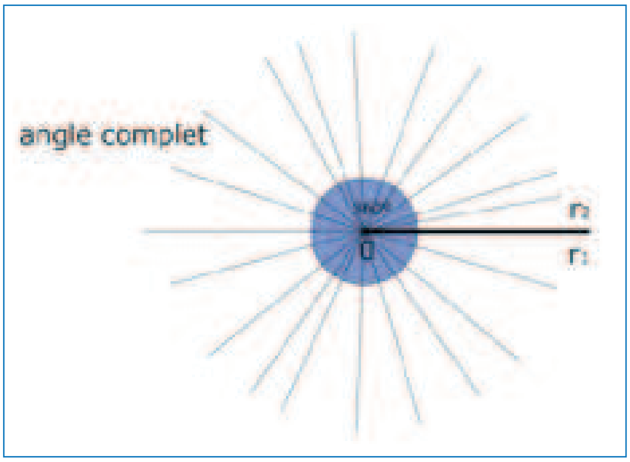
Un angle és **agut** si és més petit que un angle recte (<90º).
Un angle és **obtús** si és més gran que un angle recte (>90º).



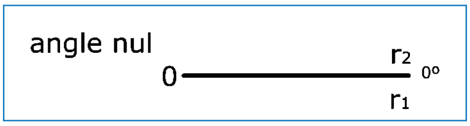
Fixa't que en el segon rellotge hi ha representat un angle obtús i que en el tercer rellotge hi ha representat un angle agut.

Hi ha altres angles que reben noms especials. Alguns d'ells ja els hem vist com és el cas de:

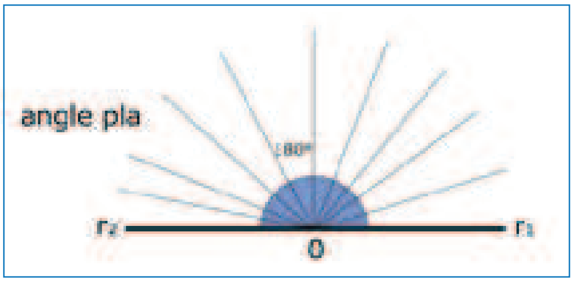
L'angle **complet**, que mesura 360º



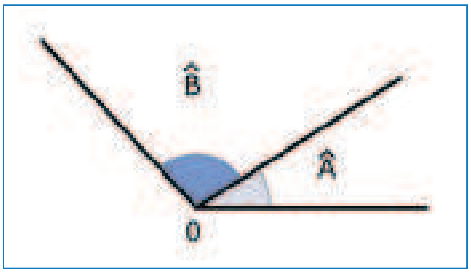
I l'angle **nul**, que mesura 0º.



Un altre angle especial és el **pla**, que mesura 180º.



Els angles **consecutius** tenen un costat i el vèrtex en comú.



Si a més de consecutius els seus costats no comuns formen un angle pla, s'anomenen **adjacents**.

Dos angles són **complementaris** si les seves mesures sumen 90º.

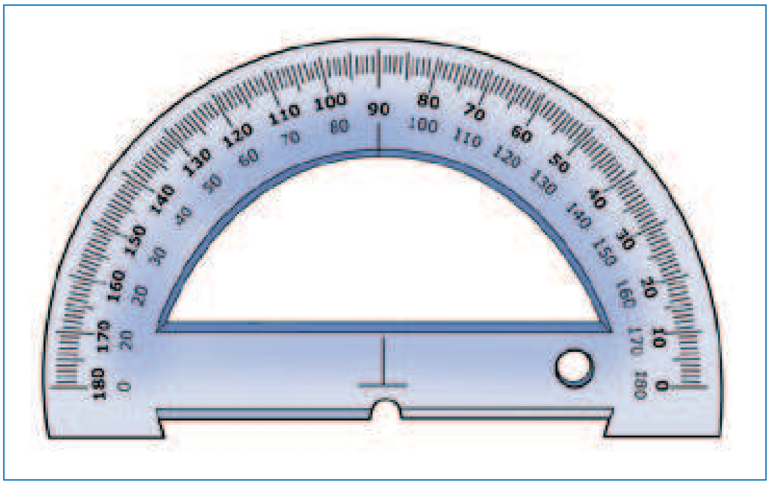
Dos angles són **suplementaris** si les seves mesures sumen 180º.

El criteri que utilitzarem per representar els angles és una lletra majúscula amb un circumflex (Â).

· **Activitats d'aprenentatge 3 i 4**

3. Mesura d'angles

Per mesurar angles s'utilitza el **semicercle graduat o transportador d'angles**. Es tracta d'un semicercle dividit en 180 parts o graus sexagesimals. Per mesurar un angle es fa coincidir el punt central del transportador amb el vèrtex de l'angle i la base del transportador amb un dels costats de l'angle.



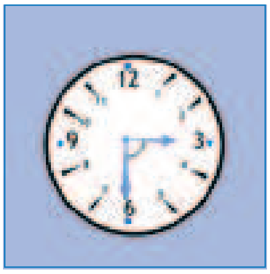
· **Activitat d'aprenentatge 5**

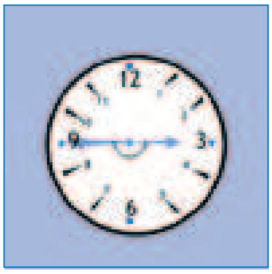
4. Operacions amb angles

Suma d'angles

Vegem un exemple de suma d'angles.

Observa aquests dos rellotges:





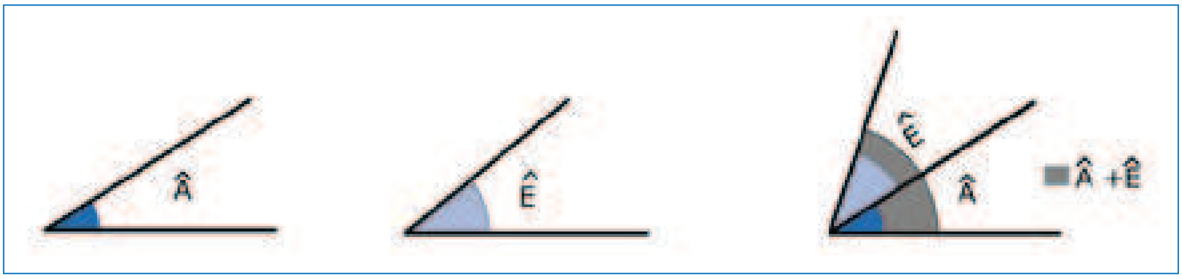
Inicialment el rellotge marca les 15:30 hores. Després de 15 minuts, el rellotge marca les 15:45 hores. Fixa't amb els angles determinats per les agulles del rellotge. L'angle inicial és un angle recte. L'angle final és un angle pla. A mesura que passen els minuts, l'agulla gran avança. Observa que aquesta agulla entre la seva posició inicial (assenyalant el 6) i la seva posició final (assenyalant el 9) determina també un angle recte. Si afegim aquest angle recte a l'angle recte inicial resulta que l'angle final és un angle pla.

90º + 90º = 180º

Per sumar dos angles Â i Ê es segueixen els passos següents:

Es construeix un angle igual a Â amb l'ajut del transportador.

Es construeix un angle igual a Ê de manera que Â i Ê siguin angles consecutius, també amb l'ajut del transportador.



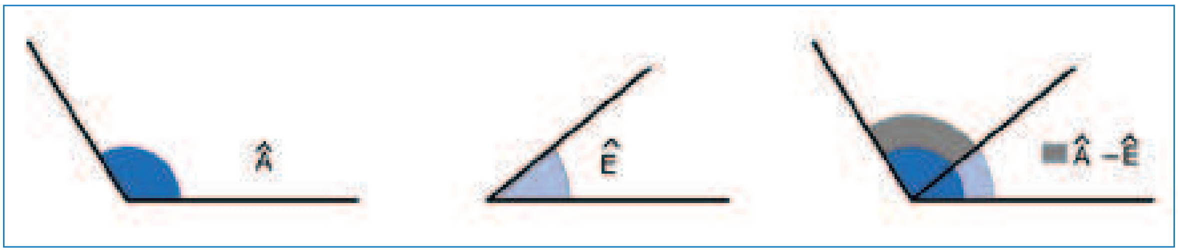
Aquest és l'angle suma.

Resta d'angles

Per restar dos angles es segueix un procés similar al de la suma però per comptes d'afegir graus a l'angle inicial n'hi haurem de treure. Això sí, l'angle inicial ha de ser més gran que l'angle que li traiem.

Es construeix un angle igual a Â amb l'ajut del transportador.

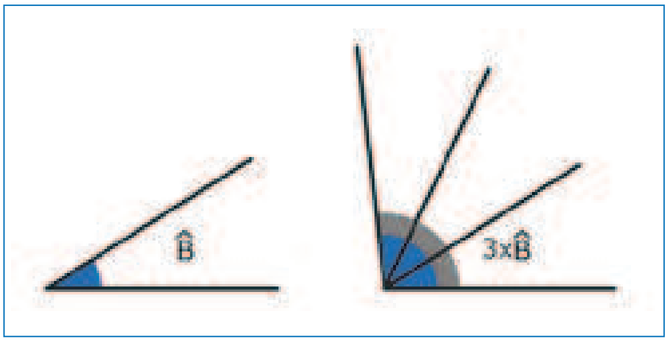
Es construeix a sobre d'Â un angle igual a l'angle Ê amb l'ajut del transportador.



Aquest és l'angle resta.

Multiplicació d'un angle per un nombre natural

Multiplicar un angle per un nombre natural és el mateix que sumar aquest angle tantes vegades com indiqui el nombre natural.



Divisió d'un angle en dos angles iguals. Bisectriu

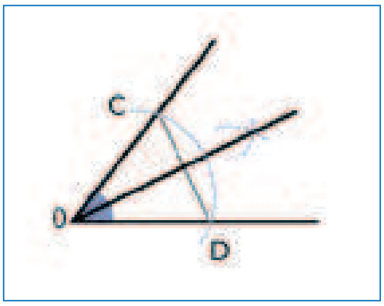
La semirecta que passa pel vèrtex d'un angle dividint-lo en dos trossos iguals s'anomena **bisectriu**. Si es dibuixa la bisectriu d'un angle, automàticament s'obtenen les dues meitats de l'angle.

La construcció de la bisectriu d'un angle es pot fer amb regle i compàs.

Agafem el compàs i prenem com a centre el vèrtex de l'angle. Tracem un arc que, en tallar amb els costats de l'angle determina dos punts C i D. Per la manera com s'han construït observa que C i D estan a la mateixa distància del vèrtex O.

Tracem dos arcs de circumferència prenent com a centres els punts C i D, de radi igual i suficientment gran per tal que els dos arcs es tallin.

Unim aquest punt de tall dels dos arcs amb el vèrtex de l'angle i ja tenim la bisectriu.



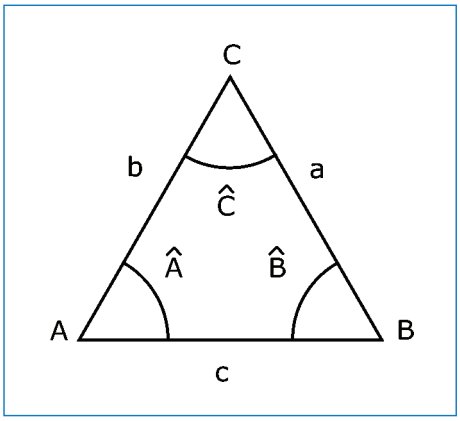
· **Activitats d'aprenentatge 6, 7, 8 i 9**

5. Triangle: Concepte i característiques

Estaràs d'acord que és impossible de dibuixar una figura plana tancada amb només dos costats. Com a mínim en necessitaràs tres.

El **triangle** és el polígon de menor nombre de costats que existeix.

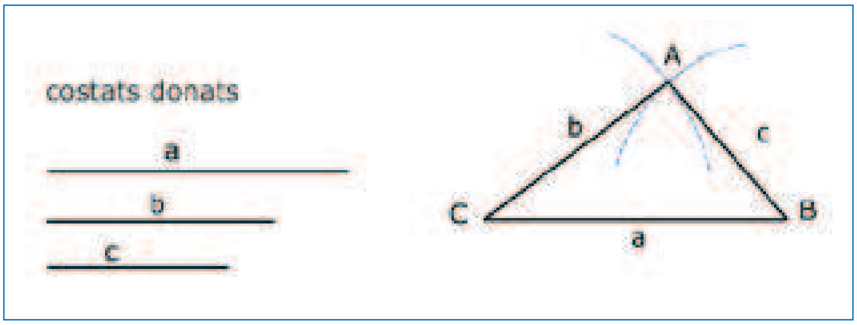
Està format per tres costats, tres vèrtexs i tres angles.



Criteri de nomenclatura

Anomenarem A, B i C els vèrtexs d'un triangle, per això quan parlem del triangle ens referirem al triangle ABC. Pels costats utilitzarem les lletres a, b i c, corresponents als vèrtexs oposats. Els angles els simbolitzarem amb la mateixa lletra que el vèrtex corresponent però amb un circumflex.

La construcció del triangle es pot fer amb regle i compàs.



Tracem un segment igual al costat a. Els extrems d'aquest costat seran òbviament dos vèrtexs (B i C) d'aquest triangle.

Tracem un arc que té com a centre el vèrtex C i com a radi la longitud del costat b. Tracem un altre arc que té com a centre el vèrtex B i com a radi la longitud del costat c. El punt de tall d'aquests dos arcs serà el tercer vèrtex (A) del triangle.

Tanmateix no n'hi ha prou amb tres costats qualssevol per construir un triangle.

ACTIVITAT

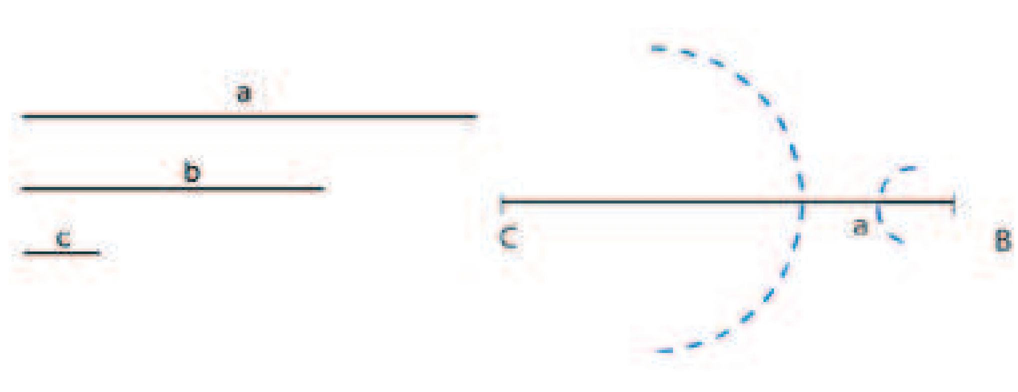
Intenta construir un triangle amb les següents mesures per als seus costats:

a = 6 cm

b = 4 cm

c = 1 cm

Solució

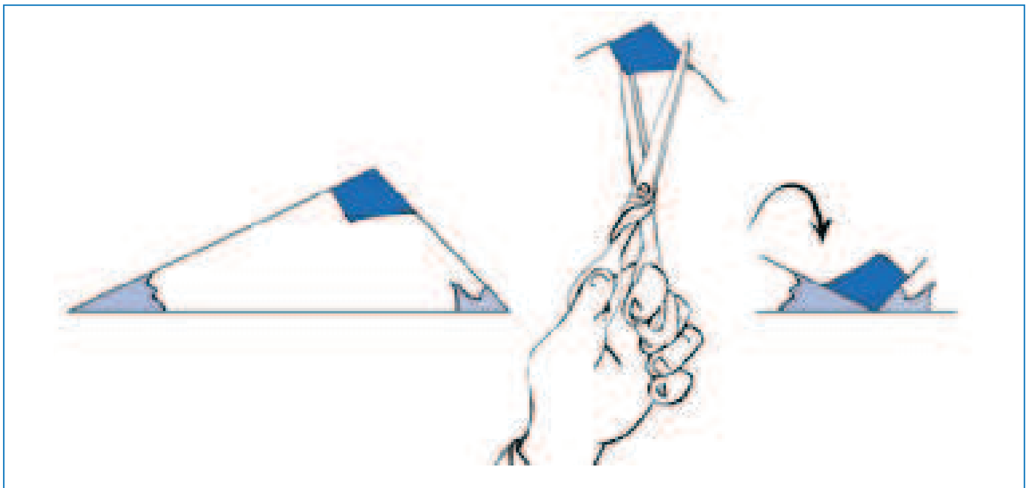


La construcció d'un triangle amb aquestes dades no és possible.

Un costat qualsevol d'un triangle ha de ser sempre més petit que la suma dels altres dos i més gran que la diferència.

En canvi en l'exemple que hem plantejat: $6 > 4 + 1$

Si es pren un triangle qualsevol i es retallen els seus tres angles interiors, és a dir, les seves "puntes", en col·locar els tres angles consecutivament a sobre d'una línia recta, com si es tractés d'un ventall, s'observa que formen un angle pla.



La suma dels angles interiors d'un triangle és un angle pla o de 180º.

· **Activitats d'aprenentatge 10 i 11**

6. Classificació de triangles

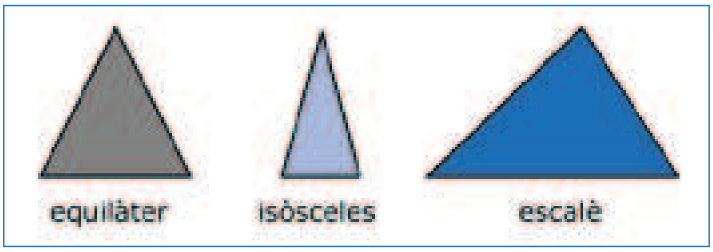
Els triangles es poden classificar segons els seus costats i segons els seus angles.

Classificació segons els costats

Triangle equilàter: té tots tres costats iguals

Triangle isòsceles: té dos costats iguals

Triangle escalè: no té cap costat igual

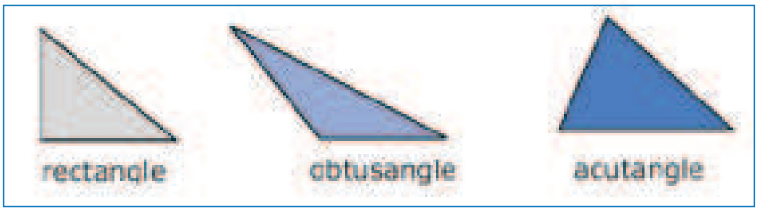


Classificació segons els angles

Triangle rectangle: conté un angle recte

Triangle obtusangle: conté un angle obtús

Triangle acutangle: té tots tres angles aguts



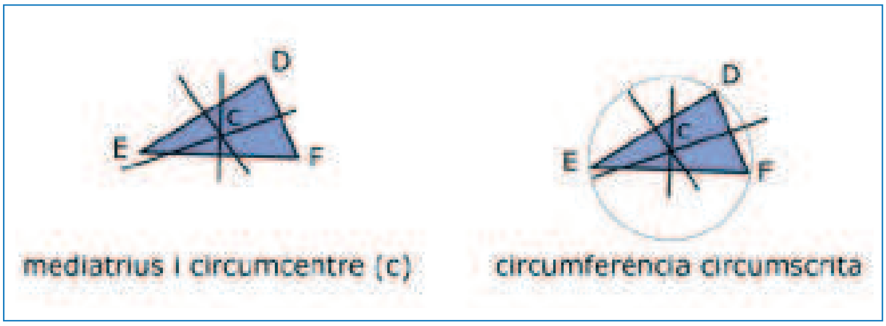
· **Activitats d'aprenentatge 12, 13 i 14**

7. Punts i rectes notables d'un triangle

Mediatrius i circumcentre

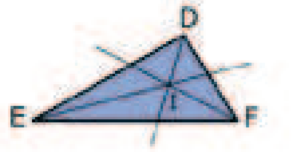
La mediatriu d'un segment és la recta perpendicular que passa pel punt mig del segment. La recta i el segment són perpendiculars quan l'angle que determinen és de 90º.

Les mediatrius d'un triangle són les mediatrius dels seus costats. Si es tracen les tres mediatrius d'un triangle es tallen en un punt que s'anomena circumcentre. Agafa el compàs i punxa'l a sobre del circumcentre. A continuació pren com a radi la distància que hi ha entre el circumcentre i un dels vèrtexs del triangle. Si hi dibuixes aquesta circumferència obtindràs la circumferència circumscrita al triangle.

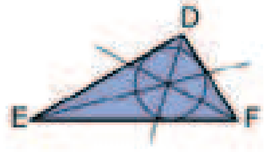


Bisectrius i incentre

Les bisectrius d'un triangle són les bisectrius dels seus angles. Les tres bisectrius d'un triangle es tallen en un punt que s'anomena incentre. Agafa el compàs i punxa'l a sobre de l'incentre. Tot seguit pren com a radi la distància entre l'incentre i un dels costats del triangle. Si hi dibuixes aquesta circumferència obtindràs la circumferència inscrita al triangle.



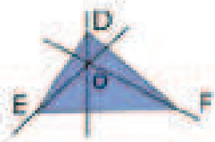
bisectrius i incentre (I)



circumferència inscrita

Altures i ortocentre

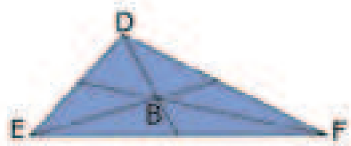
L'altura d'un triangle és la recta perpendicular a un costat o a la seva prolongació des del vèrtex oposat. Les tres altures d'un triangle es tallen en un punt que s'anomena ortocentre.



altures i octocentre (o)

Mitjanes i baricentre

La mitjana d'un triangle és el segment que uneix un vèrtex amb el punt mitjà del costat oposat. Les tres mitjanes d'un triangle es tallen en un punt que s'anomena baricentre.



mitjanes i baricentre (B)

El baricentre és el centre de gravetat del triangle.

· Activitats d'aprenentatge 15 i 16