Unitat 3

SISTEMES D'EQUACIONS

què treballaràs?

En acabar la unitat has de ser capaç de:

- **Representar gràficament sistemes d'equacions lineals i trobar la solució d'aquestes equacions.**
- **Resoldre sistemes d'equacions utilitzant els mètodes d'igualació, de substitució i de reducció.**
- **Trobar solucions a problemes utilitzant els sistemes d'equacions.**

1. Equacions de primer grau amb dues incògnites

L'equació x + y = 3 és una equació de primer grau amb dues incògnites: x i y. Per calcular les solucions escollim un valor qualsevol per a la incògnita x, substituïm la x per aquest valor i calculem el valor de la y. Així obtenim parells de nombres que són les possibles solucions de l'equació.

Aquestes solucions les col·loquem en una taula de valors.

Exemple 1

Calculem les possibles solucions de l'equació x + y = 3.
Per a facilitar el càlcul aïllem la incògnita y.
y = 3 - x
Escollim donar a la x valor 1 (x = 1), substituïm la x per 1 i calculem la y.
y = 3 -1 = 2. La y val 2. Podem escriure les solucions de l'equació (x = 1 i y = 2) de la següent manera: (1,2).
Calculem ara altres parelles de solucions de l'equació. Donem un valor a la x i calculem el valor que correspon a la y. Vegem-ho tot seguit:

x = 2	y = 3 -2 = 1	(2,1)
x = 3	y = 3 -3 = 0	(3,0)
x = 0	y = 3 -0 = 3	(0,3)
x = 4	y = 3 − 4 = −1	(4,−1)
x = −1	y = 3 -(−1) = 3 +1 = 4	(−1,4)
x = −2	y = 3 - (−2) = 3+2 = 5	(−2,5)

Escrivim la taula de valors:

x	y
1	2
2	1
3	0
4	−1
0	3
−1	4
−2	5

Exemple 2

Calculem les possibles solucions de l'equació −x − y = 5.
Aïllem la y i ens queda: −y = 5 + x.
Canviem el signe dels termes de l'equació per fer la y positiva.
y = −x − 5
Els valors que donem a la x són aleatoris. (Per tant, en tots els exemples i exercicis d'aquesta unitat es podrien donar altres valors diferents dels que s'han donat.)

Si la x val 1	x = 1	y = −1 −5 = −6	(1,−6)
	x = +2	y = −2 −5 = −7	(2,−7)
	x = 0	y = 0 −5 = −5	(0,−5)
	x = −1	y = − (−1) −5 = 1 −5 = −4	(−1,−4)
	x = −2	y = − (−2) −5 = 2 −5 = −3	(−2,−3)

Fem la taula de valors:

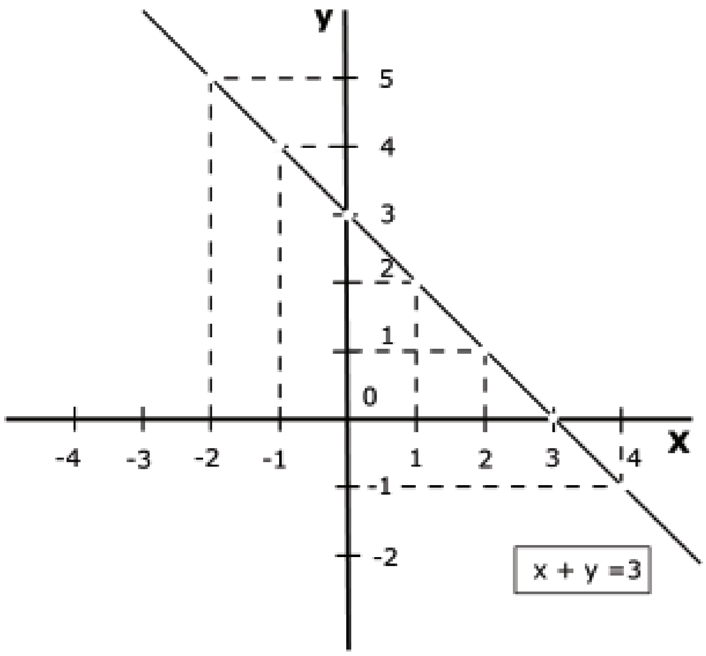
x	y
1	−6
2	−7
0	−5
−1	−4
−2	−3

2. Representació gràfica d'equacions de primer grau amb dues incògnites

Recordem que una taula de valors es pot representar en uns eixos de coordenades cartesianes. Cada parell de solucions és un punt de la gràfica.

Tornem a l'equació x + y = 3 del primer exemple, recuperem la taula de valors i representem els punts.

x	y
1	2
2	1
3	0
4	−1
0	3
−1	4
−2	5



Representació gràfica de l'equació.

Quan tracem la línia que uneix els punts obtenim una recta.

Podem dir que l'equació **x + y = 3 és l'equació de la recta** que hem obtingut.

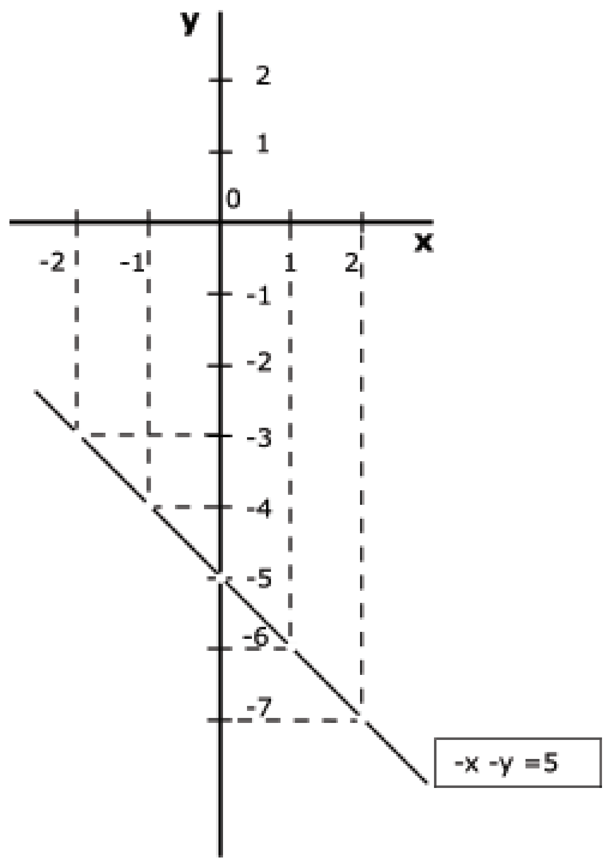
Si representem en els eixos de coordenades l'equació del segon exemple. Quin tipus de gràfica sortirà? Creus que sortirà una recta?

Provem-ho.

Equació: $-x - y = 5$

Taula de valors:

x	y
1	−6
2	−7
0	−5
−1	-4
−2	−3



Representació gràfica de l'equació.

Ha sortit una recta i com en el cas anterior podem dir que -x-y = 5 és la seva equació.

Si representéssim més equacions de primer grau amb dues incògnites comprovaríem aquest resultat.

La representació gràfica d'una equació de primer grau és sempre una recta.

Per aquesta raó:

Les equacions de primer grau amb dues incògnites també s'anomenen equacions lineals.

- **Activitat d'aprenentatge 1.**

3. Sistemes d'equacions

Què passaria si representéssim dues equacions lineals en uns mateixos eixos de coordenades?

Suposem les equacions $x + y = -3$ i $x - y = 1$.

- Per fer la representació de l'equació $x + y = -3$.

Aïllem y ⟶ $y = -3 - x$.

Calculem la taula de valors:

x	y
1	−4
2	−5
0	−3
−1	−2
−2	−1

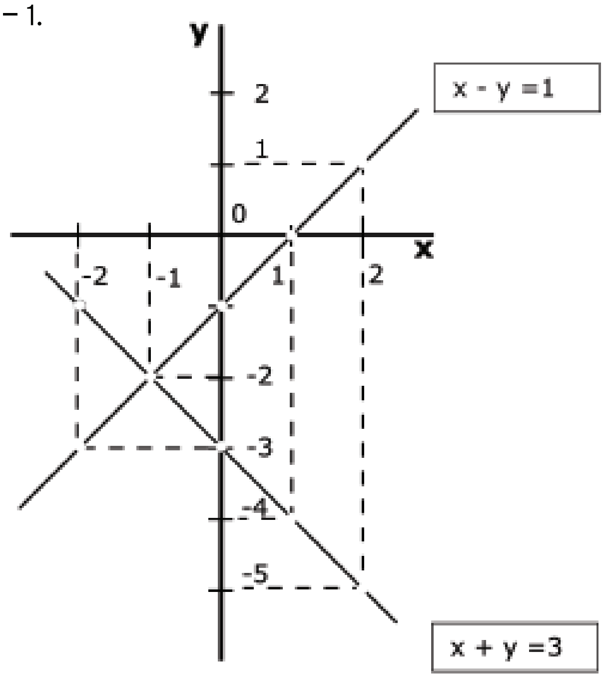
- Fem la representació de la segona equació $x - y = 1$.

Aïllem y ⟶ $-y = -x + 1$.

Fem la y positiva ⟶ $y = x - 1$.

Calculem la taula de valors:

x	y
1	0
2	1
0	−1
−1	−2
−2	−3



Representació gràfica de les dues equacions sobre els mateixos eixos de coordenades.

Fixa't que les dues equacions es tallen en un punt.

Esbrina el valor de les coordenades d'aquest punt.

T'ha sortit que en aquest punt la $x = -1$ i la $y = -2$? Si és així has calculat bé les coordenades i has d'escriure-les així $(-1, -2)$.

El punt on es tallen les dues rectes s'anomena punt d'intersecció.

Les coordenades d'aquest punt (–1,–2) són a la vegada una solució de la primera i de la segona equació.

Podem dir que:

les equacions $x + y = -3$ i $x - y = 1$ formen un sistema de dues equacions amb dues incògnites i l'escriurem de la manera següent:

$$\left.\begin{array}{l} x + y = -3 \\ x - y = 1 \end{array}\right\}$$

la solució d'aquest sistema es $x = -1$ i $y = -2$. Que són les coordenades del punt d'intersecció.

Podem pensar que sempre que hi ha un sistema hi ha un punt d'intersecció de les rectes?

Esbrinem-ho.

Fem la representació gràfica del sistema.

$x - y = 2$

$-x + y = 1$

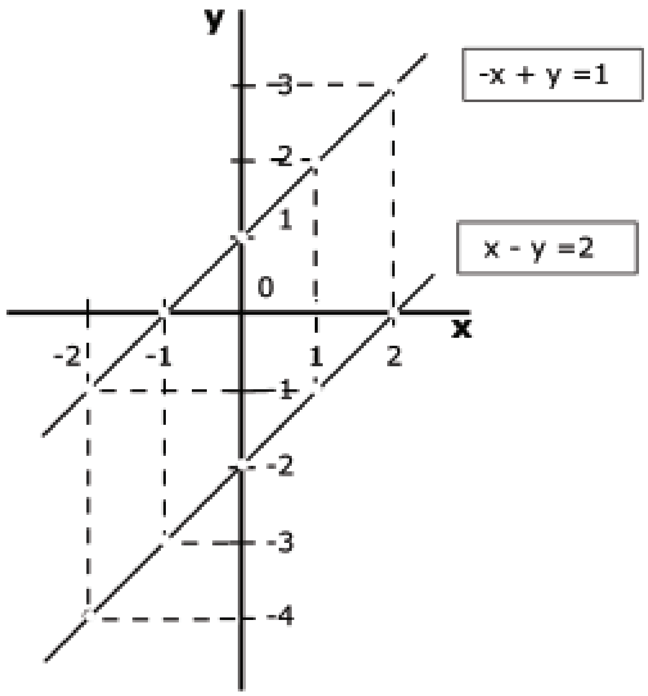
Calculem la taula de valors de cada una de les equacions.

- Equació: $x - y = 2$
  $y = x - 2$

x	y
1	–1
2	0
0	–2
–1	–3
–2	–4

- Equació: $-x + y = 1$
  $y = 1 + x$

x	y
1	2
2	3
0	1
–1	0
–2	–1



Representació gràfica de les dues equacions sobre els mateixos eixos de coordenades.

Les dues rectes obtingudes són rectes paral·leles que no tenen cap punt en comú. **Per tant, el sistema no té solució.**

Fem la representació gràfica d'un altre sistema.

$$\left.\begin{aligned} 6x + 2y &= 2 \\ 3x + y &= 1 \end{aligned}\right\}$$

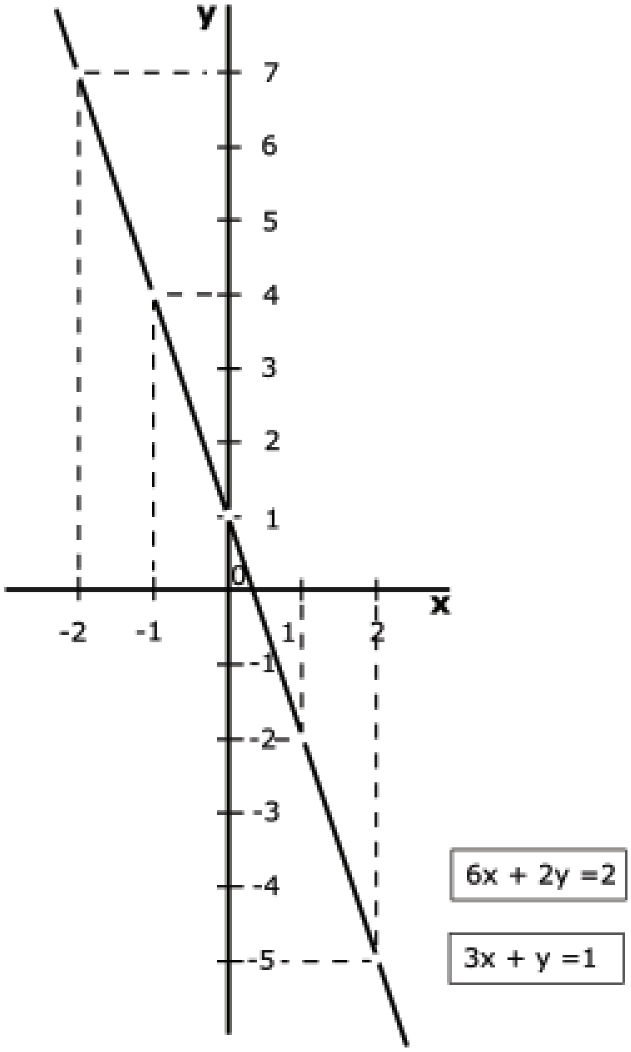
Calculem la taula de valors de cada una de les equacions.

· Equació: $6x + 2y = 2$

x	y
1	−2
2	−5
0	1
−1	4
−2	7

· Equació: $3x + y = 1$
$y = 1 - 3x$

x	y
1	−2
2	−5
0	1
−1	4
−2	7



Representació gràfica de les dues equacions sobre els mateixos eixos de coordenades.

Les dues rectes coincideixen. Això vol dir que les seves equacions són equivalents. El sistema té infinites solucions.

La representació gràfica d'un sistema de dues equacions amb dues incògnites pot:

- Tenir un punt en comú. El sistema té una única solució. Les rectes es tallen.
- No tenir cap punt en comú. El sistema no té solució. Les rectes són paral·leles.
- Tenir tots els punts en comú. El sistema té infinites solucions. Només és una recta.

- **Activitats d'aprenentatge 2 i 3.**

4. Mètodes de resolució de sistemes d'equacions

En l'apartat anterior hem resolt els sistemes d'equacions lineals de forma gràfica. Quan utilitzem el mètode gràfic podem tenir dificultats en cas que les solucions no siguin nombres enters. Per això es fa necessari aprendre a resoldre sistemes de forma algebraica mitjançant el mètode analític.

Hi ha tres mètodes analítics: el mètode d'igualació, el mètode de substitució i el mètode de reducció.

Mètode d'igualació

Per a resoldre un sistema d'equacions lineals pel mètode d'igualació es fa de la següent manera:

1r S'aïlla la mateixa incògnita en les dues equacions.
2n S'igualen les dues expressions obtingudes.
3r Es resol l'equació .
4t Es calcula el valor de la segona incògnita substituint el valor obtingut de la primera en una de les dues equacions.

Resolem el següent sistema pel mètode d'igualació.

$$\left.\begin{array}{l} 3x - y = 1 \\ 2x + 3y = 8 \end{array}\right\}$$

1r Aïllem la incògnita **y** en les dues equacions.

$$-y = 1 - 3x$$
$$y = 3x - 1$$
$$y = \frac{8-2x}{3}$$

2n Igualem les dues expressions obtingudes.

$$3x - 1 = \frac{8-2x}{3}$$

3r Resolem l'equació.

$$9x - 3 = 8 - 2x$$
$$9x + 2x = 8 + 3$$
$$11x = 11$$
$$x = \frac{11}{11}$$
$$x = 1$$

4t Substituïm la x pel seu valor (x = 1) en una de les dues equacions i trobem el valor de la y.

$$y = 3x - 1$$
$$y = 3(1) - 1$$
$$y = 2$$

Les solucions del sistema són x = 1 i y = 2.

- **Activitats d'aprenentatge 4**

Mètode de substitució

Per a resoldre un sistema d'equacions lineals pel mètode de substitució es fa de la següent manera:

1r S'aïlla una incògnita d'una de les dues equacions.
2n Se substitueix l'expressió obtinguda en l'altra equació.
3r Es resol l'equació obtinguda.
4t Es calcula el valor de la segona incògnita.

Resolem el sistema anterior pel mètode de substitució.

$$\left.\begin{array}{l} 3x - y = 1 \\ 2x + 3y = 8 \end{array}\right\}$$

1r Aïllem la incògnita y de la primera.

$$-y = 1 - 3x$$
$$y = 3x - 1$$

2n Substituïm l'expressió en la segona equació.

$$2x + 3(3x - 1) = 8$$

3r Resolem l'equació.

$$2x + 9x - 3 = 8$$
$$2x + 9x = 8 + 3$$
$$11x = 11$$
$$x = \frac{11}{11}$$
$$x = 1$$

4t Substituïm el valor de la x en la primera equació per a saber el valor de la y.

$$3(1) - y = 1$$
$$3 - y = 1$$
$$3 - 1 = y$$
$$2 = y$$

Hem obtingut les mateixes solucions per a l'equació: $x = 1$ i $y = 2$

- **Activitats d'aprenentatge 5.**

Mètode de reducció

Per a resoldre un sistema d'equacions lineals pel mètode de reducció es fa de la següent manera:

1r S'ha d'aconseguir que les dues equacions tinguin un terme oposat. Recordem que un terme oposat és un terme igual, però amb signe contrari. Per a aconseguir-ho s'apliquen les propietats de les equacions (multiplicar o dividir termes).
2n Se sumen les equacions obtingudes.
3r Es resol l'equació resultant.
4t Es calcula el valor de la segona incògnita.

Apliquem aquest mètode al sistema anterior.

$$\left.\begin{array}{l} 3x - y = 1 \\ 2x + 3y = 8 \end{array}\right\}$$

1r Per a aconseguir que tinguin un terme oposat multipliquem la primera equació per 3 i queda l'equació.

$$9x - 3y = 3$$

En aquesta equació hem obtingut el terme -3y, que si la comparem amb la segona equació veiem que és oposat al terme 3y.

2n Sumem les dues equacions.

$$\begin{array}{l} 9x - 3y = 3 \\ \underline{2x + 3y = 8} \\ 11x + 0 = 11 \end{array}$$

3r Resolem l'equació 11x =11.

$$x=1$$

4t Per a calcular el valor de la y fem com en els dos mètodes anteriors, substituïm el valor de la x i calculem el valor de la y.

$$\begin{array}{l} 3(1) - y = 1 \\ 3 - y = 1 \\ 3 -1 = y \\ 2 = y \end{array}$$

Les solucions del sistema són: x = 1 i y = 2.

- **Activitat d'aprenentatge 6.**

5. Aplicació dels sistemes d'equacions per a resoldre problemes

Es poden resoldre problemes mitjançant sistemes d'equacions lineals. Els passos que hem de seguir són els mateixos que utilitzàvem quan la resolució de problemes la fèiem amb equacions que tenien una sola incògnita.

Els passos que hem de fer són els següents:

1r Escollir les incògnites.
2n Plantejar el sistema.
3r Resoldre el sistema. Per a la resolució del sistema podem utilitzar qualsevol dels tres mètodes que hem après.

Exemple 1

La suma de dos nombres és 15 i la seva diferència 1. Quins són els nombres?

Un nombre serà la incògnita x.

L'altre nombre serà la incògnita y.

Plantegem les equacions:

La suma és 15, $x + y = 15$

La diferència és 1, $x - y = 1$

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 15 \\ x - y = 1 \end{array}\right\}$$

Resolem el sistema pel mètode de reducció.

$$\begin{array}{l} x + y = 15 \\ x - y = 1 \\ \hline 2x + 0 = 16 \end{array}$$

$$2x = 16$$
$$x = 8$$

Per a saber quan val y fem la substitució.

$$8 + y = 15$$
$$y = 7$$

Els nombres són 8 i 7.

Exemple 2

Entre dos germans tenen 13 CD d'en Lluís Llach. El doble dels CD que té un és igual als que té l'altre més 2.

Un germà té x CD i l'altre y. En total tenen $x + y = 13$

La segona equació serà: $2x = y + 2$

El sistema serà:

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 13 \\ 2x = y + 2 \end{array}\right\}$$

Per a resoldre el sistema utilitzem el mètode de substitució.

$$x = 13 - y$$
$$2(13 - y) = y + 2$$
$$26 - 2y = y + 2$$
$$-2y - y = 2 - 26$$
$$-3y = -24$$
$$y = 8$$

Calculem l'altra incògnita.

$$x = 13 - 8$$
$$x = 5$$

Un té 8 CD i l'altre en té 5.

- **Activitats d'aprenentatge 7,8,9 i 10.**