Unitat 1

DIVISIBILITAT

què treballaràs?

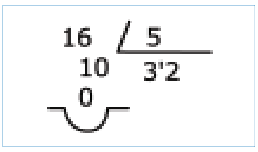
En acabar la unitat has de ser capaç de:

- **Identificar i determinar els múltiples i divisors d'un nombre.**
- **Reconèixer les propietats dels múltiples i divisors.**
- **Reconèixer i utilitzar els criteris de divisibilitat dels nombres 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10 i 11.**
- **Reconèixer els nombres primers.**
- **Calcular tots els divisors d'un nombre.**
- **Calcular el mcd i el mcm d'un nombre.**
- **Utilitzar els conceptes de mcd i mcm per resoldre problemes de la vida quotidiana.**

1. Múltiples i divisors

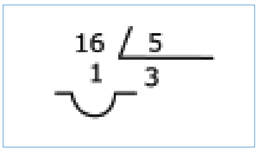
El disseny de les cares de la moneda de l'euro depèn de cada país de la Unió Europea, però el que no varia és el valor d'aquestes monedes. Que hi hagi monedes d'1 cèntim d'€, 2 cèntims d'€ o 5 cèntims d'€, o bé monedes d'1€, 2€, o bitllets de 5€, no és per què sí. De fet hi ha una explicació matemàtica. Es treballa amb l'1, el 2 i el 5 perquè així s'aconsegueix sumar qualsevol quantitat de diners amb el mínim de monedes.

Imagina que has de repartir 16€ entre 5 persones. Si es fa la divisió que resol el problema es té que:

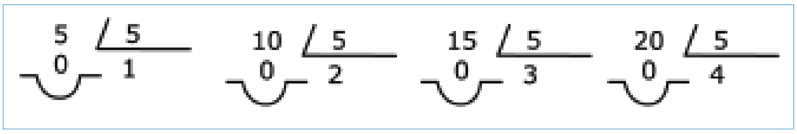


Com que l'euro també disposa de monedes de cèntim, a cada persona li correspondran 3,2€ o, el que és el mateix, 3€ i 20 cèntims.

Però, què passaria si l'euro no disposés de cèntims? En aquest cas, en la divisió anterior, no podríem utilitzar la coma ni tampoc els decimals.

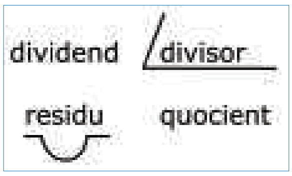


A cada persona li correspondrien 3€ i sobraria 1€ en el repartiment. Quan es dóna aquesta situació es diu que **la divisió no és exacta**. Perquè la divisió fos exacta la quantitat de diners a repartir entre les cinc persones hauria de ser o bé 5€, o bé 10€, o bé 15€, o bé 20€...



Que una divisió no sigui exacta és un problema que acostuma a passar amb els nombres naturals N = { 1, 2, 3, 4, 5, ..., 10, ..., 100, ..., 1.000, ... }. Només quan la divisió és exacta, el resultat de dividir dos nombres naturals és un altre nombre natural.

Una divisió és exacta quan el seu residu val zero. Recorda que els elements de l'operació divisió són: dividend, divisor, quocient i residu.

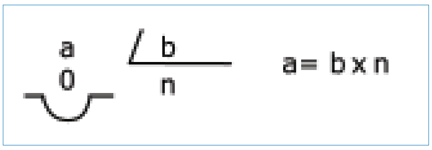


Observa que dels exemples anteriors de divisions exactes tenim que:

5 = 5 x 1
10 = 5 x 2
15 = 5 x 3
20 = 5 x 4
... .
... .

Fixa't que es compleix el següent:

dividend = divisor x quocient.



Quan es dóna aquesta situació es diu que:

a és un múltiple de b

a és divisible per b

b és divisor de a

Observa que els conceptes de múltiple i divisor són inversos l'un de l'altre.

Imagina que tens dues guardioles. En una guardes només monedes de 2€ i en l'altra bitllets de 5€. Trenquem la primera guardiola, la que guarda només monedes de 2€. Comencem a comptar els diners que hi tenim: 2€, 4€, 6€, 8€, 10€, 12€, 14€, 16€, 18€, 20€, 22€, 24€,..., 58€, 60€. Totes les quantitats que anem comptant són múltiples de 2. Ara trenquem la segona guardiola i anem fent recompte dels diners que hi tenim: 5€, 10€, 15€, 20€, 25€, 30€, 35€, 40€,..., 55€, 60€. En aquest cas totes les quantitats que anem comptant són múltiples de 5. Observa que:

Múltiples de 2:
2 x 1 = 2
2 x 2 = 4
2 x 3 = 6
... ...
2 x 10 = 20
... ...
2 x 29 = 58
2 x 30 = 60

Múltiples de 5:
5 x 1 = 5
5 x 2 = 10
5 x 3 = 15
... ...
5 x 10 = 50
... ...
5 x 11 = 55
5 x 12 = 60

Els múltiples d'un nombre s'obtenen multiplicant aquest nombre per qualsevol nombre natural.

També es considera múltiple d'un nombre natural el zero. En conseqüència, el conjunt dels múltiples d'un nombre és il·limitat:

Conjunt dels múltiples de 2 = {0, 2, 4, 6, ... , 20, ... , 200, ... , 2.000, ... }

Conjunt dels múltiples de 5 = {0, 5, 10, 15, ... , 50, ... , 500, ... , 5.000, ... }

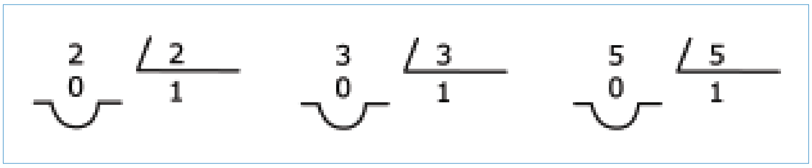
· **Activitats d'aprenentatge 1, 2, 3, 4 i 5**

2. Propietats dels múltiples i dels divisors d'un nombre

Fixa't en el recompte de diners de les guardioles. Tant en una guardiola com en l'altra hem començat el recompte pel valor de la moneda que hem guardat: 2 i 5. És, doncs, natural que 2 i 5 siguin múltiples d'ells mateixos, és a dir, de 2 i de 5 respectivament. De la mateixa manera, en cas d'existir monedes de 3€, el recompte de la guardiola, sempre que no estigui buida, començaria per 3 i per tant el nombre 3 seria múltiple d'ell mateix. Dit d'una altra manera, **qualsevol nombre natural és múltiple d'ell mateix**.

Com que els conceptes de múltiple i divisor són inversos l'un de l'altre, és lògic pensar que:

Si 2 és múltiple de 2, 3 és múltiple de 3, 5 és múltiple de 5, etc., aleshores **2 és divisor de 2, 3 és divisor de 3, 5 és divisor de 5, etc.**



En efecte, totes les divisions són exactes i en totes el quocient val 1.

Imagina ara que tens una tercera guardiola on tens guardades monedes d'1€. Fem el recompte de diners que hi tens: 1€, 2€, 3€, 4€, 5€,.... Totes les quantitats que anem comptant seran múltiples d'1. A més, si es pogués tenir infinites monedes a la guardiola, aniríem enumerant un a un tots els nombres naturals. Per tant, **qualsevol nombre natural és múltiple d'1. I a la inversa, la unitat ,1, és divisor de qualsevol nombre**.

2€, 4€, 6€, 8€, 10€,..., 56€, 58€, 60€ són quantitats de diners que podem reunir amb monedes de 2€.

Per exemple:

Per reunir 8€ calen 4 monedes de 2€	8 = 2 x 4
Per reunir 10€ calen 5 monedes de 2€	10 = 2 x 5
... ...	... ...
Per reunir 58€ calen 29 monedes de 2€	58 = 2 x 29
Per reunir 60€ calen 30 monedes de 2€	60 = 2 x 30

Comprova que si sumes algunes d'aquestes quantitats, el resultat és una quantitat de diners que també es pot reunir utilitzant només monedes de 2€.

Per exemple:

10€ + 60€ = 70€

Per reunir 70€ ens caldran 35 monedes de 2€ 70 = 2 x 35

El mateix passa amb els bitllets de 5€.

Per exemple:

Per reunir 5€ ens cal un bitllet de 5€	5 = 5 x 1
Per reunir 10€ ens calen 2 bitllets de 5€	10 = 5 x 2
... ...	... ...
Per reunir 30€ ens calen 6 bitllets de 5€	30 = 5 x 6
... ...	... ...
Per reunir 55€ ens calen 11 bitllets de 5€	55 = 5 x 11
Per reunir 60€ ens calen 12 bitllets de 5€	60 = 5 x 12

Comprova que si sumes algunes d'aquestes quantitats, el resultat torna a ser una quantitat de diners que es pot reunir amb només bitllets de 5€.

Per exemple:

30€ + 60€ = 90€

Per reunir 90€ ens caldran 18 bitllets de 5€ 90 = 5 x 18

Observa que la suma de nombres múltiples de 2 torna a ser un nombre múltiple de 2 i que la suma de nombres múltiples de 5 torna a ser un nombre múltiple de 5.

Fixa't que aquesta propietat sobre els múltiples d'un nombre serà vàlida per a qualsevol altre nombre.

Aquesta propietat es pot reescriure per a la resta de múltiples d'un nombre.

Pots comprovar com la suma de múltiples de 3 també és múltiple de 3 i que la resta de múltiples de 3 també és múltiple de 3.

Hem vist que la suma de múltiples de 2 és un múltiple de 2, i que la suma de múltiples de 5 és un múltiple de 5. És 2 un divisor d'aquesta suma? I 5? Quina propietat pots escriure sobre els divisors d'un nombre?

3. Nombres compostos

Tant en la guardiola de monedes de 2€ com en la guardiola de bitllets de 5€ hi ha reunits un total de 60€. En una guardiola hi tenim 30 monedes de 2€ i en l'altra 12 bitllets de 5€:

60 = 2 x 30

i

60 = 5 x 12.

Fixa't que 60€ també els podem reunir amb 60 monedes d'1€: 60 = 1 x 60.

O bé amb 6 bitllets de 10€: 60 = 6 x 10.

O bé amb 3 bitllets de 20€: 60 = 3 x 20.

El nombre 60 es diu que és un **nombre compost** perquè es pot descompondre de més d'una manera com a producte de dos factors.

60 =
- 1 x 60
- 2 x 30
- 3 x 20
- 4 x 15
- 5 x 12
- 6 x 10

Aquestes són totes les descomposicions possibles del nombre 60 com a producte de dos factors. Aquestes descomposicions permeten trobar tots els **divisors d'un nombre**: cada factor és un divisor:

Divisors de 60 = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60}

4. Nombres primers

En canvi, hi ha nombres que només admeten una sola descomposició com a producte de dos factors. Aquests nombres s'anomenen nombres primers.

Per exemple:

El nombre 2 només es pot descompondre com 2 = 1 x 2.
El nombre 5 només es pot descompondre com 5 = 1 x 5.
El nombre 17 només es pot descompondre com 17 = 1 x 17.

ACTIVITAT

Sabries dir si 3 és un nombre primer o no? I 13? Per què?

Observa que en els exemples anteriors els únics divisors dels nombres primers són el propi nombre i la unitat.

Divisors de 2 = {1, 2 }
Divisors de 5 = {1, 5}
Divisors de 17 = {1, 17}

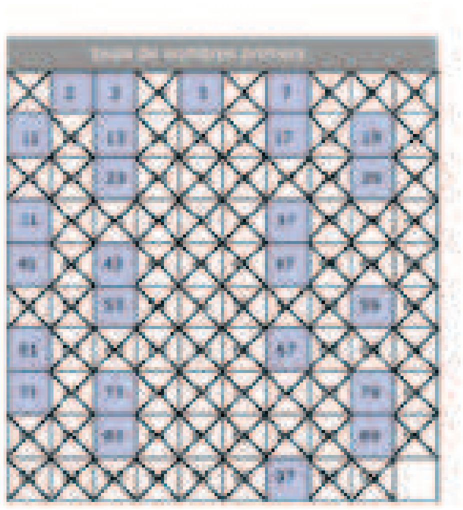
Deixant de banda l'1, un nombre és primer si només és divisible per ell mateix i per la unitat.

L'1 es pot considerar nombre primer o no. Això dependrà de l'autor, de les definicions... o fins i tot de la cultura, com és el cas, per exemple, dels antics grecs, els quals començaven els nombres pel dos, ja que per a ells l'u representava únicament la unitat.

De nombres primers n'hi ha infinits. El garbell d'Eratòstenes permet d'una manera senzilla, encara que una mica lenta, aconseguir tots els nombres primers més petits que 100.

El **garbell d'Eratòstenes**:

- Elimina el nombre 1, que no el considerarem primer en aquest mòdul.
- 2 és un nombre primer. Elimina tots els seus múltiples que, òbviament, no seran nombres primers ja que com a mínim seran divisibles per 2.
- 3 és el nombre primer que segueix. Com abans, elimina els seus múltiples.
- Fes el mateix amb els nombres primers que segueixen, és a dir, el 5 i el 7.
- Un cop hem acabat aquest procés, els nombres que no han estat eliminats són justament els nombres primers més petits que 100. Si anéssim més enllà del 100, continuaríem el procés amb els nombres 11, 13, 17, etc.



- **Activitats d'aprenentatge 6, 7, 8, 9 i 10**

5. Descomposició d'un nombre en factors primers

Per a molts matemàtics els nombres primers estan considerats els àtoms de la matemàtica. Això es deu al fet que qualsevol nombre enter es pot construir a partir dels nombres primers.

Recorda que has pogut reunir 60€ tant en monedes de 2€ com en bitllets de 5€. 2 i 5 són divisors de 60 i al mateix temps 2 i 5 són nombres primers. Fixa't que es pot construir el nombre 60 de la següent manera:

$$60 = \underset{\text{primer}}{2} \times \underset{\text{primer}}{5} \times \underset{\text{compost}}{6}$$

Al mateix temps, el nombre 6 es pot construir de la manera següent:

$$6 = \underset{\text{primer}}{2} \times \underset{\text{primer}}{3}$$

Per tant:

$60 = 2 \times 5 \times 2 \times 3$

O el que és el mateix:

$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$

> **Descompondre un nombre en factors primers** significa expressar aquest nombre en forma de producte de potències de nombres primers.

$60 = 2^2 \times 3 \times 5$

Un mètode que permet descompondre un nombre en factors primers consisteix a dividir aquest nombre pel primer més petit pel qual és divisible. Es fa el mateix amb el resultat obtingut, i així successivament fins que obtenim un 1 en el quocient.

La descomposició l'escrivim en forma de producte de potències.

Exemple:

Descomposició en factors primers del nombre 18.

18	2	2 és el primer més petit que divideix el 18
9	3	3 és el primer més petit que divideix el 9
3	3	3 és el primer més petit que divideix el 3
1		

$18 = 2 \times 3 \times 3 = 2 \times 3^2$

La descomposició d'un nombre en factors primers permet trobar tots els divisors d'aquest nombre.

18 és divisible per 1, 2

18 és divisible per 1, 3, 3^2

Per calcular tots els divisors del nombre 18 anem fent productes dels divisors anteriors:

$1 \times 1 = 1$
$1 \times 2 = 2$

$3 \times 1 = 3$
$3 \times 2 = 6$

$3^2 \times 1 = 9$
$3^2 \times 2 = 18$

Per tant, tots els divisors del nombre 18 són:

Divisors de 18 = { 1, 2, 3, 6, 9, 18 }.

Segur que ja t'has adonat que a diferència del que passa amb el conjunt dels múltiples d'un nombre, el conjunt dels seus divisors no és un conjunt il·limitat. És més, pots trobar tots els divisors d'un nombre, per exemple, a partir de la seva descomposició factorial en nombres primers.

- **Activitats d'aprenentatge 11, 12 i 13**

6. Criteris de divisibilitat

Hi ha regles que ajuden a saber si un nombre és divisible per un altre. Això et pot anar molt bé quan hagis de descompondre un nombre en factors primers o quan hagis de trobar-li divisors a un nombre. Aquestes regles s'anomenen criteris de divisibilitat. Aquí en tenim algunes:

- Divisibilitat per 2: Un nombre és divisible per dos si acaba en zero o en xifra parella.
- Divisibilitat per 3: Un nombre és divisible per tres si la suma de les seves xifres és múltiple de tres.
- Divisibilitat per 4: Un nombre és múltiple de quatre quan les seves dues últimes xifres o bé són dos zeros o bé formen un número múltiple de quatre.
- Divisibilitat per 5: Un nombre és múltiple de cinc quan acaba en zero o en cinc.
- Divisibilitat per 6: Un nombre és divisible per sis quan ho és per tres i per dos.
- Divisibilitat per 9: Un nombre és divisible per nou quan la suma de les seves xifres és múltiple de nou.
- Divisibilitat per 10: Un nombre és divisible per deu si acaba en zero. Anàlogament, si acaba en 00 serà divisible per 100, si acaba en 000 serà divisible per mil, etc.
- Divisibilitat per 11: Un nombre és divisible per onze quan la diferència entre la suma de les xifres que ocupen una posició parella i la suma de les xifres que ocupen una posició senar és múltiple d'onze.

- **Activitats d'aprenentatge 14 i 15**

7. Màxim comú divisor i mínim comú múltiple

Torna a mirar-te les dues guardioles del començament: la que conté monedes de 2€ i la que conté bitllets de 5€. Torna a fixar-te en el recompte de diners de cadascuna:

Guardiola 2€	1r	2n	3r	5è	10è	15è	20è	25è	30è
	2€	4€	6€	10€	20€	30€	40€	50€	60€

Guardiola 5€	1r	2n	3r	4t	5è	6è	8è	10è	12è
	5€	10€	15€	20€	25€	30€	40€	50€	60€

En totes dues guardioles hi ha quantitats que es repeteixen: 10€, 20€, 30€, 40€, 50€ i 60€. Per tant, aquestes quantitats es poden reunir tant en monedes de 2€ com en bitllets de 5€. Dit d'una altra manera, els nombres 10, 20, 30, 40, 50 i 60 són múltiples tant de 2 com de 5. Observa que d'entre aquests **múltiples comuns** el més petit és el nombre 10. Es diu que 10 és el **mínim comú múltiple** dels nombres 2 i 5. mcm (2, 5) = 10.

El mínim comú múltiple de dos o més nombres és el múltiple comú més petit de tots ells.

Per calcular-lo es pot utilitzar la següent regla pràctica:

a) descomponem els nombres en factors primers;
b) agafem els factors comuns i no comuns dotats de l'exponent més gran i fem el seu producte.

Anàlogament es pot definir el màxim comú divisor de dos o més nombres. Imagina que has de reunir 20€ per una banda i 40€ per l'altra. Tant en un cas com en l'altre ho podries fer utilitzant només monedes d'1€, o bé monedes de 2€, o bé bitllets de 5€, o bé de 10€, o bé de 20€. Ara bé, si es vol reunir totes dues quantitats amb la mateixa moneda i utilitzant el mínim de bitllets, és clar que s'haurà de fer amb bitllets de 20€ ja que només caldrà un bitllet per reunir la primera quantitat i 2 bitllets per reunir la segona. De fet, 20 és el màxim comú divisor dels nombres 20 i 40. mcd (20, 40) = 20.

El màxim comú divisor de dos o més nombres és el més gran dels divisors comuns de tots ells.

Per calcular-lo es pot utilitzar la següent regla pràctica:
a) descomponem els nombres en factors primers;
b) agafem els factors comuns dotats de l'exponent més petit i calculem el seu producte.

- **Activitats d'aprenentatge 16, 17, 18, 19, 20, 21 i 22**