

Máximo común divisor y mínimo común múltiplo

MÁXIMO COMÚN DIVISOR

• El máximo común divisor (m.c.d.) de dos o más números es el mayor de los divisores comunes.

• Para hallar el máximo común divisor de dos o más números, por ejemplo, m.c.d. (12, 18), se siguen estos pasos:

1.º Se descompone cada número en producto de factores primos.

2.º El producto de estos factores comunes elevados al menor exponente es el máximo común divisor de los números dados.

$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$12 = 2^2 \times 3$$

$$18 = 2 \times 3^2$$

$$\text{m.c.d. (12, 18)} = 2 \times 3 = 6$$

1

Halla el máximo común divisor de los siguientes pares de números.

40 y 60

$$\begin{array}{r|l} 40 & \\ 60 & \end{array}$$

$$\text{m.c.d. (40, 60)} = 2^2 \cdot 5 = 20$$

100 y 150

$$\begin{aligned} \text{m.c.d. (100, 150)} &= \\ &= 2 \cdot 5^2 = 50 \end{aligned}$$

35 y 48

$$\text{m.c.d. (35, 48)} = 1$$

225 y 300

$$\begin{aligned} \text{m.c.d. (225, 300)} &= \\ &= 5^2 \cdot 3 = 75 \end{aligned}$$

70 y 62

$$\text{m.c.d. (70, 62)} = 2$$

415 y 520

$$\text{m.c.d. (415, 520)} = 5$$

2

Halla el máximo común divisor de los siguientes pares de números.

280 y 840

$$\text{m.c.d. (280, 840)} = 2^3 \cdot 5 \cdot 7$$

- ¿Es 840 múltiplo de 280? **Si**
- ¿Cuál es el m.c.d. (280, 840)? **280**

315 y 945

$$\text{m.c.d. (315, 945)} = 3^2 \cdot 5 \cdot 7$$

- ¿Es 945 múltiplo de 315? **Si**
- ¿Cuál es el m.c.d. (315, 945)? **315**

- En general, si a es múltiplo de b, ¿cuál es el m.c.d. (a, b)?

$$\text{m.c.d. (a, b)} = b$$

3

Halla el máximo común divisor de las siguientes series de números.

- 180, 252 y 594

$$\text{m.c.d. (180, 252, 594)} = 3^2 \cdot 2 = 18$$

- 924, 1.000 y 1.250

$$\text{m.c.d. (924, 1.000, 1.250)} = 2$$

MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO

• El mínimo común múltiplo (m.c.m.) de dos o más números es el menor múltiplo común distinto de cero.

• Para hallar el mínimo común múltiplo de dos o más números, por ejemplo, m.c.m. (30, 45), se siguen estos pasos:

$$\begin{array}{r|l} 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

1.º Se descompone cada número en producto de factores primos.

$$30 = 2 \times 3 \times 5$$

$$45 = 3^2 \times 5$$

2.º El producto de estos factores comunes elevados al mayor exponente y de los no comunes es el mínimo común múltiplo de los números dados.

$$\text{m.c.m. (30, 45)} = 2 \times 3^2 \times 5 = 90$$

1

Halla el mínimo común múltiplo de los siguientes pares de números.

32 y 68

$$\begin{array}{l} \text{m.c.m. (32 y 68) =} \\ = 2^5 \cdot 17 = \mathbf{544} \end{array}$$

52 y 76

$$\begin{array}{l} \text{m.c.m. (52 y 76) =} \\ = 2^2 \cdot 13 \cdot 19 = \mathbf{988} \end{array}$$

84 y 95

$$\begin{array}{l} \text{m.c.m. (84 y 95) =} \\ = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 19 = \mathbf{7980} \end{array}$$

105 y 210

$$\begin{array}{l} \text{m.c.m. (105 y 210) =} \\ = 5 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 2 = \mathbf{210} \end{array}$$

380 y 420

$$\begin{array}{l} \text{m.c.m. (380 y 420) =} \\ = 2^2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 19 = \mathbf{7980} \end{array}$$

590 y 711

$$\begin{array}{l} \text{m.c.m. (590 y 711) =} \\ = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 59 \cdot 79 = \mathbf{419490} \end{array}$$

2

Halla el mínimo común múltiplo de los siguientes pares de números.

320 y 640

420 y 1.260

$$\text{m.c.m. (320, 640)} = 2^6 \cdot 5$$

- ¿Es 640 múltiplo de 320? **Si**
- ¿Cuál es el m.c.m. (320, 640)? **640**

$$\text{m.c.m. (420, 1.260)} =$$

- ¿Es 1.260 múltiplo de 420? **Si**
- ¿Cuál es el m.c.m. (420, 1.260)? **1.260**

- En general, si a es múltiplo de b, ¿cuál es el m.c.m. (a, b)?

$$\text{m.c.m. (a, b)} = a$$

3

Halla el mínimo común múltiplo de las siguientes series de números.

- 140, 325 y 490

$$\text{m.c.m. (140, 325, 490)} = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 13 = 63700$$

- 725, 980 y 1.400

$$\text{m.c.m. (725, 980, 1.400)} = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 29 = 284.200$$

1. El ebanista ahorrador

Un ebanista quiere cortar una plancha de madera de 256 cm de largo y 96 cm de ancho, en cuadrados lo más grandes posible.

- a) ¿Cuál debe ser la longitud del lado de cada cuadrado?
 b) ¿Cuántos cuadrados se obtienen de la plancha de madera?

SOLUCIÓN

- a) La longitud del lado del cuadrado tiene que ser un divisor de 256 y de 96, y además debe ser el mayor divisor común; luego hay que calcular el m.c.d. (256, 96).

$$256 = 2^8$$

$$96 = 2^5 \times 3$$

$$\text{m.c.d. (256, 96)} = 2^5 = 32$$

La longitud del lado del cuadrado es de 32 cm.

- b) Área de la plancha de madera $\rightarrow 256 \times 96 = 24.576 \text{ cm}^2$
 Área de uno de los cuadrados $\rightarrow 32 \times 32 = 1.024 \text{ cm}^2$

De la plancha de madera se obtienen $24.576 : 1.024 = 24$ cuadrados.

2. Una cita en Sevilla

Un viajante va a Sevilla cada 18 días, otro va a Sevilla cada 15 días y un tercero va a Sevilla cada 8 días. Hoy día 10 de enero han coincidido en Sevilla los tres viajeros.

¿Dentro de cuántos días como mínimo volverán a coincidir en Sevilla?

SOLUCIÓN

- a) El número de días que han de transcurrir como mínimo para que los tres viajeros vuelvan a coincidir en Sevilla tiene que ser un múltiplo de 18, de 15 y de 8, y además tiene que ser el menor múltiplo común; luego hay que calcular el m.c.m. (18, 15, 8).

$$18 = 2 \times 3^2$$

$$15 = 3 \times 5$$

$$8 = 2^3$$

$$\text{m.c.m. (18, 15, 8)} = 2^3 \times 3^2 \times 5 = 360$$

Los tres viajeros volverán a coincidir en Sevilla dentro de 360 días.

1

Andrés tiene en su tienda los botones metidos en bolsas. En la caja A tiene bolsitas de 24 botones cada una y no sobra ningún botón. En la caja B tiene bolsitas de 20 botones cada una y tampoco sobra ningún botón. El número de botones que hay en la caja A es igual que el que hay en la caja B.

¿Cuántos botones como mínimo hay en cada caja?

$$\text{m.c.m. (24, 20) = 120}$$

R/ Hi ha 120 botons a cada caixa

2

María y Jorge tienen 25 bolas blancas, 15 bolas azules y 90 bolas rojas y quieren hacer el mayor número de collares iguales sin que sobre ninguna bola.

a) ¿Cuántos collares iguales pueden hacer?

$$\text{m.c.d. (25, 15, 90) = 5}$$

R/ Puc fer 5 collarets iguals

b) ¿Qué número de bolas de cada color tendrá cada collar?

R/ 5 blanques, 3 blaves i 18 vermelles.

3

Un campo rectangular de 360 m de largo y 150 m de ancho, está dividido en parcelas cuadradas iguales. El área de cada una de estas parcelas cuadradas es la mayor posible.

¿Cuál es la longitud del lado de cada parcela cuadrada?

$$\text{m.c.d. (360, 150) = 30}$$

R/ 30 metres

4

Teresa tiene un reloj que da una señal cada 60 minutos, otro reloj que da una señal cada 150 minutos y un tercero que da una señal cada 360 minutos. A las 9 de la mañana los tres relojes han coincidido en dar la señal.

a) ¿Cuántas horas, como mínimo, han de pasar para que vuelvan a coincidir?

$$\text{m.c.m. } (60, 150, 360) = 1800$$

R/ Han de passar 30 hores (1800 minuts / 60).

b) ¿A qué hora volverán a dar la señal otra vez juntos?

R/ a les 3 de la tarda del dia següent.

5

Rosa tiene cubos azules de 55 mm de arista y cubos rojos de 45 mm de arista. Apilando los cubos en dos columnas, una de cubos azules y otra de cubos rojos, quiere conseguir que las dos columnas sean iguales.

¿Cuántos cubos, como mínimo, necesita de cada color?

$$\text{m.c.m. } (55, 45) = 495$$

R/ 9 de blaus (495mm / 55mm) i 11 de vermells (495mm / 45mm)

6

Juan tiene que poner un rodapié de madera a dos paredes de 12 m y 9 m de longitud. Para ello ha averiguado la longitud del mayor listón de madera que cabe en un número exacto de veces en cada pared.

¿Cuál será la longitud de este listón?

$$\text{m.c.d. } (12, 9) = 3$$

R/ La longitud és de 3 metres.