

quaderns de matemàtiques



trigonometria

AUTOR / RECOPIILADOR:

Xavier Vilardell Bascompte – xevi.vb@gmail.com – www.xelu.net

CURS: 2007-2008

ÚLTIMA REVISIÓ: 22 de gener de 2008

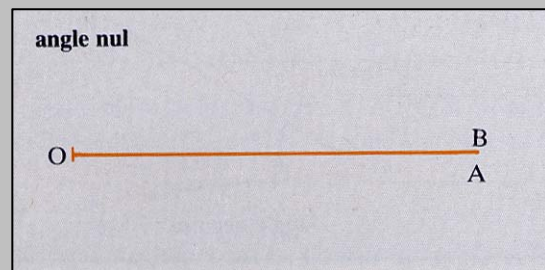
Aquests quaderns de matemàtiques han estat realitzats per donar les classes del Graduat en Educació Secundària de l'Aula Oberta de Tona, que forma part del Centre de Formació Permanent d'Osona Sud.



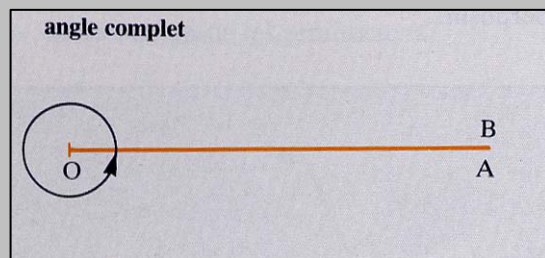
Dues semirectes del pla, OA i OB, amb origen comú O, divideixen el pla en dues regions. Cadascuna d'aquestes regions s'anomena **angle**.

Segons la posició dels costats d'un angle, podem trobar-ne de diferents tipus:

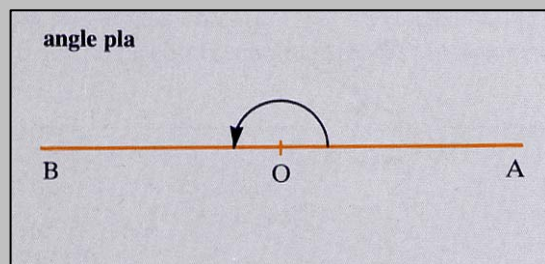
ANGLE NUL: Si els dos costats coincideixen (0°).



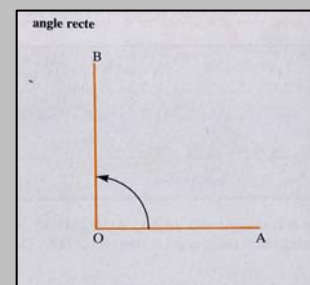
ANGLE COMPLET: És el que va associat a una circumferència sencera. També en aquest cas els costats coincideixen, però l'angle abasta tot el pla (360°).



ANGLE PLA: Si els dos costats són dues semirectes d'una mateixa recta (180°).

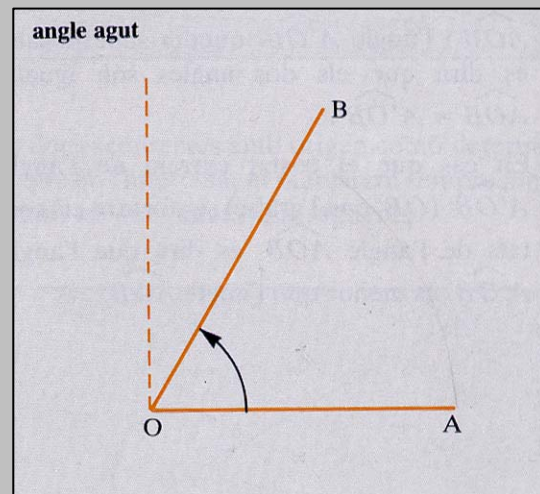


ANGLE RECTE: Aquell angle tal que, si perllonguen les semirectes que el defineixen, divideix el pla en quatre angles iguals (90°). En aquest cas es diu que els dos costats són perpendiculars.

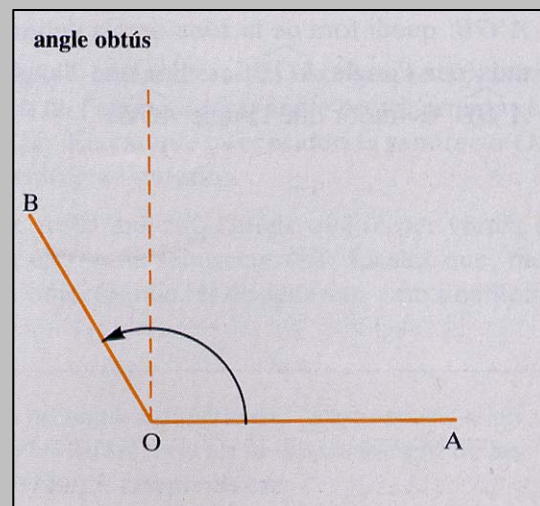




ANGLE AGUT: Aquell que és menor que un angle recte.



ANGLE OBTÚS: Aquell que és més gran que un angle recte.

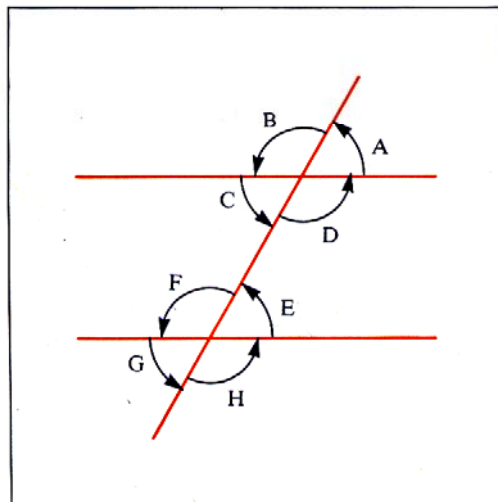
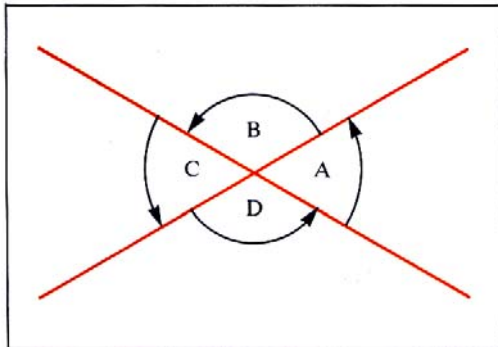


Aquells angles la suma dels quals és un angle recte s'anomenen **COMPLEMENTARIS**.

Aquells angles la suma dels quals és un angle pla s'anomenen **SUPLEMENTARIS**.



Ja s'ha dit que dos angles són iguals quan coincideixen per superposició. Ara bé, hi ha quatre situacions geomètriques que sempre determinen angles iguals. Són aquestes:



a) Quan es fa la intersecció de dues rectes es determinen quatre angles. Hi ha dues parelles d'angles, *oposats pel vèrtex*, que són iguals ($A = C$ i $B = D$).

Observem també que els angles A i B són suplementaris, així com el C i el D .

b) Quan dues rectes paral·leles es tallen per una secant, queden determinats 8 angles que reben diverses denominacions.

$\left. \begin{matrix} A \text{ i } E \\ B \text{ i } F \\ C \text{ i } G \\ D \text{ i } H \end{matrix} \right\}$ reben el nom de *corresponents* i són iguals $\left\{ \begin{matrix} A = E \\ B = F \\ C = G \\ D = H \end{matrix} \right.$

$\left. \begin{matrix} C \text{ i } E \\ D \text{ i } F \end{matrix} \right\}$ reben el nom d'*alterns interns* i són iguals $\left\{ \begin{matrix} C = E \\ D = F \end{matrix} \right.$

$\left. \begin{matrix} A \text{ i } G \\ B \text{ i } H \end{matrix} \right\}$ reben el nom d'*alterns externs* i són iguals $\left\{ \begin{matrix} A = G \\ B = H \end{matrix} \right.$

A més d'això, convé fer observar que hi ha moltes parelles d'angles en posició adjacent que són suplementaris:

A i B , B i C , C i D , D i A , etc.

Com a cas particular d'aquesta situació podem considerar el següent:

Dos angles aguts de costats paral·lels són iguals.

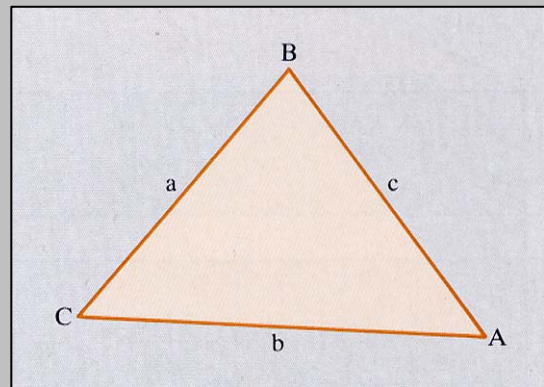


TRIANGLES

Donats tres punts no alineats, A, B i C, la figura tancada que resulta quan s'uneixen aquests tres punts entre si mitjançant segments s'anomena **triangle**.

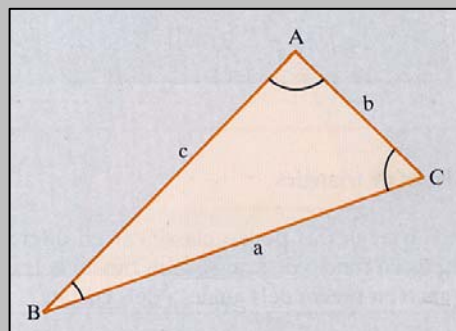
Els punts A, B i C s'anomenen **vèrtex** del triangle.

Els segments BC, CA i AB que determinen aquest triangle s'anomenen **costats** i els indicarem mitjançant les lletres a, b, c, que representen els costats oposats respectivament als vèrtex A, B i C. Així el segment a (que uneix els punts B i C) és el costat oposat al vèrtex A.



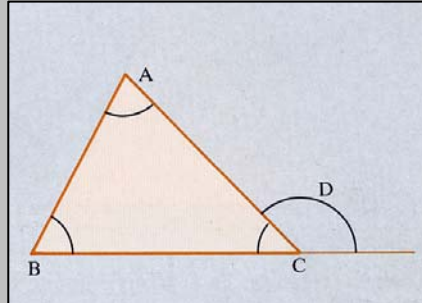
PROPIETATS DELS COSTATS I ANGLES D'UN TRIANGLE

- La suma dels angles d'un triangle és de 180° .
- En cada triangle, l'angle més gran és l'oposat al costat més llarg i l'angle més petit és l'oposat al costat més curt.
- En cada triangle, la suma de les longituds de dos costats és sempre més gran que la longitud de l'altre costat.





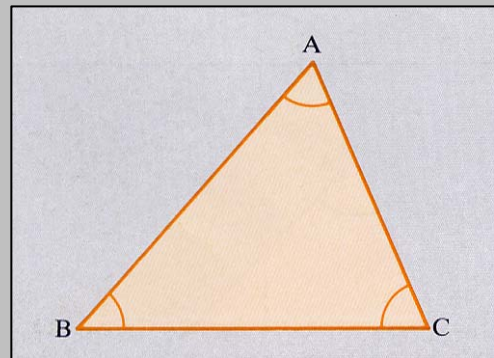
- L'angle exterior que es forma amb un costat i la prolongació de l'altre és igual a la suma dels altres dos angles interiors. O sigui $D = A + B$.



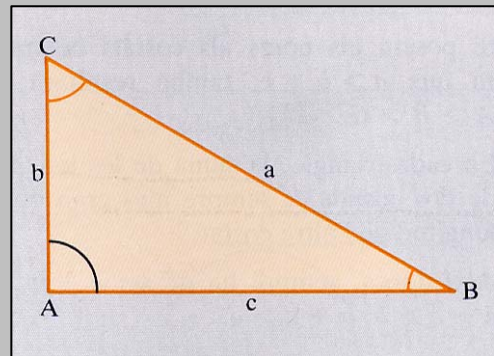
TIPUS DE TRIANGLES

Els triangles es poden classificar en diferents tipus en funció dels angles, en funció dels costats o en funció dels angles i dels costats.

TRIANGLE ACUTANGLE: És el triangle que té tots els angles aguts.



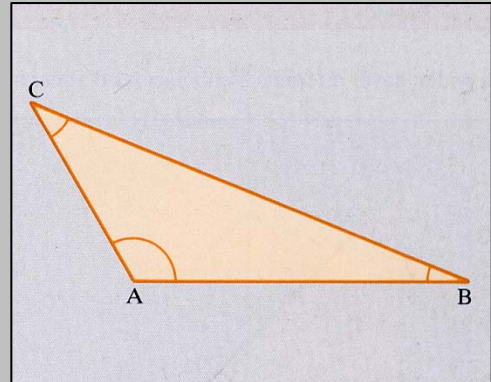
TRIANGLE RECTANGLE: És el triangle que té un angle recte. En un triangle rectangle, el costat oposat a l'angle recte (A en el dibuix) s'anomena **hipotenusa** (a) i els altres dos costats, **catets**. En un triangle rectangle, els dos angles aguts sumen 90° i, per tant, són complementaris.



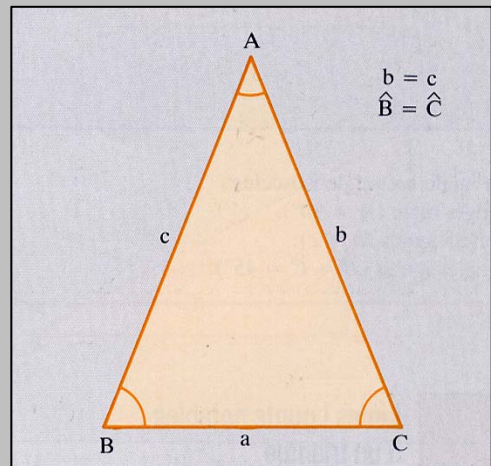


TRIANGLE OBTUSANGLE: És el triangle que té un dels angles obtús.

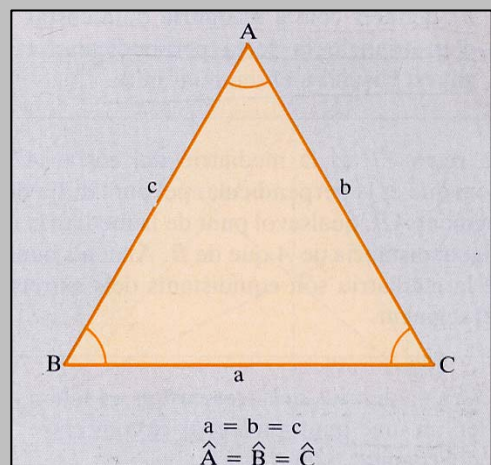
TRIANGLE ESCALÈ: És el triangle amb tres costats de diferent longitud.



TRIANGLE ISÒSCELES: És el triangle que té dos angles iguals i dos costats iguals. N'hi ha prou amb saber que un triangle té dos costats (o angles) iguals per a poder assegurar que és isòsceles.



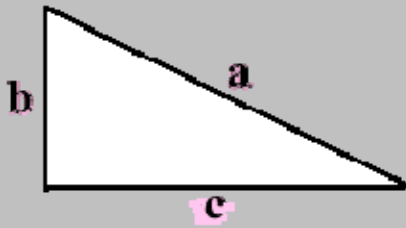
TRIANGLE EQUILÀTER: És el triangle que té els tres costats iguals i els tres angles iguals. N'hi ha prou amb saber que un triangle té els tres costats (o angles) iguals per a poder assegurar que és equilàter. És clar que en un triangle equilàter cada angle és de 60° .





EL TEOREMA DE PITÀGORES

L'enunciat del teorema de Pitàgores és: "**En un triangle rectangle, el quadrat de la hipotenusa és igual a la suma dels quadrats dels catets**". si anomenem **a**, la hipotenusa i **b** i **c** els catets el teorema queda:



$$a^2 = b^2 + c^2$$

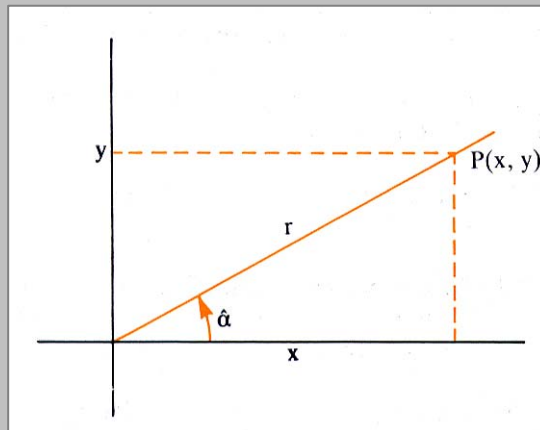
PROBLEMES DEL TEOREMA DE PITÀGORES

1. Els catets d'un triangle rectangle mesuren 5 m i 10 m. Calcula quan mesura la hipotenusa.
2. La hipotenusa d'un triangle rectangle mesura 13 m i un catet 12. Calcula quan mesura l'altre catet.
3. Els catets d'un triangle rectangle mesuren cada un 10 cm. Quina és la longitud de la hipotenusa?
4. Un catet d'un triangle rectangle mesura 3 cm i l'altre, 4 cm. Quina és la longitud de la hipotenusa?
5. La hipotenusa d'un triangle rectangle mesura 8 cm. Calcula quan mesuren els dos catets, sabent que tenen la mateixa longitud.



RAONS TRIGONOMÈTRIQUES

Considerem el sistema de referència coordenat, i, en aquest sistema, un angle α . Sigui P un punt qualsevol del segon costat de l'angle, el qual té coordenades (x,y) en la referència cartesiana, i r la distància d'aquest punt P a l'origen de coordenades (r sempre serà un valor positiu).



SINUS

Es defineix *sinus de l'angle* α com el quocient o raó entre l'ordenada y de P i la distància r a l'origen de coordenades.

$$\sin \alpha = \frac{y}{r}$$

COSINUS

De manera semblant es defineix *cosinus de l'angle* α com el quocient o raó entre l'abscissa x de P i la distància r a l'origen de coordenades.

$$\cos \alpha = \frac{x}{r}$$

**TANGENT**

També es defineix *tangent de l'angle* α com el quocient o raó entre l'ordenada y i l'abscissa x del punt P .

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}$$

PROBLEMES DE TRIGONOMETRIA

1. La hipotenusa d'un triangle rectangle mesura 10 m i un dels seus angles aguts, 20° . Quina és la mida real del catet oposat a aquest angle?
2. Un dels angles aguts d'un triangle rectangle mesura 70° i el catet contigu 15 m. Quant mesura l'altre catet?
3. La hipotenusa d'un triangle rectangle mesura 8 cm i un catet, 4 cm. Troba la longitud de l'altre catet i les mesures dels angles aguts.
4. Un ciclista puja per un pendent que té una inclinació respecte a l'horitzontal de 25° . Quan arriba al cim del pendent, ha recorregut 1.200 metres. A quina alçada es troba el cim?
5. Un camí de muntanya puja 35 m en una distància horitzontal de 100 m. Calcula la tangent de l'angle que forma el camí amb l'horitzontal. Si el camí pugés 35 m en una distància horitzontal de 60 m, quina seria la tangent de l'angle?
6. Un far té una alçada de 20 m i des d'un vaixell s'observa el seu punt més alt sota un angle de 22° . A quina distància es troba el vaixell del far?



7. Podries saber l'altura d'una torre si la seva ombra fa 5 m i els raigs del sol fan un angle de 65° amb l'horitzontal?
8. Quina és la longitud de l'ombra que fa un arbre de 4 metres quan el sol es troba a una altura de 60° sobre l'horitzó?
9. Busca l'alçada a què arriba una escala de 8 m repenjada en una paret i formant un angle de 45° amb el terra.
10. Calculeu la distància que separa un observador i el cim d'una paret de 59 m d'alçada, sabent que l'angle d'elevació és de 46° .
11. Dues torres iguals estan separades per una distància d'1 km. Des del cim d'una torre es veu la base de l'altra torre amb un angle de depressió de 5° . Quina alçada tenen les torres?
12. Troba l'altura d'una antena sabent que a una distància de 18m es veu la part superior de l'antena sota un angle de 30° .
13. La base d'un triangle isòsceles mesura 64cm, i l'angle que es forma entre els costats iguals és de 40° . Calcula el perímetre i l'àrea del triangle.
14. Un tronc de 6,2m està repenjant a una paret i forma amb el terra un angle de 55° . A quina altura de la paret es troba repenjat? Calcula la distància des de l'extrem inferior del tronc fins a la paret.
15. Un arbre projecte una ombra de 16,75m quan l'angle d'elevació del sol és de 32° . Calcula l'altura de l'arbre.
16. Una persona de 176cm d'alçada projecte una ombra de 121cm. Calcula l'angle del sol respecte l'horitzó.
17. Un estel està unit al terra per un fil de 100m que forma amb l'horitzontal del terreny un angle de 60° . Suposant que el fil està tensat, troba l'altura del cometa.



18. Des d'un far col·locat a 40m sobre el nivell del mar l'angle de depressió d'un vaixell és de 55° . A quina distància del far es troba el vaixell?
19. En un tros de carretera la inclinació és de 6° . A quina alçada puja la carretera en 42m mesurats sobre la mateixa carretera?
20. Una escala de mà està repenjada a la paret d'un edifici, de manera que del peu de l'escala a l'edifici hi ha 12m. A quina altura del terra es troba l'extrem superior de l'escala i quina és la seva longitud si aquesta forma un angle de 70° amb el terra?
21. Un home recorre 500m al llarg d'un camí que té una inclinació de 20° respecte l'horitzontal. A quina altura arribarà respecte el punt de partida?
22. Un arbre trencat pel vent, forma un triangle rectangle amb el terra. Quina és l'alçada de l'arbre, si la part que ha caigut al terra forma amb aquest un angle de 50° , i si la part del tronc que ha quedat en peu té una altura de 20m?