Unitat 3

PROPORCIONALITAT

què treballaràs?

En acabar la unitat has de ser capaç de:

- **Diferenciar entre raó de proporció i proporcionalitat.**
- **Calcular les mides reals a partir de representacions a escala.**
- **Calcular les mides a escala de distàncies reals per elaborar plànols, mapes, etc.**
- **Utilitzar la propietat fonamental de les proporcions.**
- **Trobar dades mitjançant la regla de tres.**
- **Calcular percentatges.**
- **Trobar dades reals en casos concrets a partir dels seus percentatges.**

1. Raó i proporcions

El Dry Martini és un còctel que es prepara barrejant ginebra amb una quantitat variable de vermut blanc i que s'acostuma a adornar amb una oliva o un trosset de pell de llimona. Existeixen, doncs, moltes variants del Dry Martini. Una de les receptes podria ésser aquesta:

Dry Martini

1 Part de vermut blanc
3 Parts de ginebra
1 Oliva

Fixa't que per preparar el Dry Martini hauríem de barrejar, en una coctelera amb gel, 1 part de vermut blanc i tres de ginebra. Això ho podríem escriure en forma de fracció:

$$\frac{\text{Parts de vermut blanc}}{\text{Parts de ginebra}} = \frac{1}{3}$$

La relació entre les parts de ginebra i les parts de vermut blanc és el que anomenem **raó** i és un nombre que ens dóna una idea de la relació entre les parts de vermut i les parts de ginebra. En aquest cas la relació és d'una a tres.

> Una **raó** és el quocient de dues quantitats comparables. La raó ens indica el nombre de vegades que el dividend conté el divisor.

Segur que has estat temptat de dir que la proporció de ginebra i de vermut blanc en un Dry Martini és d'un terç. De fet, en el llenguatge del carrer, quan parlem de raons les anomenem proporcions, però matemàticament una proporció és una altra cosa, com veuràs d'aquí a uns moments.

Imagina ara que vols preparar dos Dry Martini, la quantitat de ginebra i de vermut serà, lògicament, el doble. I per tant la raó entre les dues quantitats serà:

$$\frac{\text{Parts de vermut blanc}}{\text{Parts de ginebra}} = \frac{2}{6}$$

I si en volguéssim tres? Lògicament, hauríem de posar tres parts de vermut blanc i nou de ginebra. La raó entre les dues quantitats, en aquesta ocasió, seria de:

$$\frac{\text{Parts de vermut blanc}}{\text{Parts de ginebra}} = \frac{3}{9}$$

Fixa't que en tots els casos hi ha tres vegades més ginebra que vermut blanc. Això és així ja que 1/3, 2/6 i 3/9 representen la mateixa raó ja que:

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = 0{,}33$$

> Una **proporció** és la igualtat entre dues raons.

La **raó de proporció** és en aquest cas 0,33.

ACTIVITAT

Quan reveles un rodet de fotografies pots demanar que les còpies te les facin a diferents formats, 7x10, 10x15, 18x24, 20x30, etc. Aquests nombres ens indiquen les mides dels costats de les fotografies. Tenint en compte que la mida del negatiu és de 3,6 cm x 2,4 cm, digues quins formats són proporcionals a la mida del negatiu.

Resolució

La raó de proporció del negatiu és $\dfrac{3{,}6 \text{ cm}}{2{,}4 \text{ cm}} = 1{,}5$

Per tant, els formats de fotografies que estan en proporció amb els negatius són aquells que tenen la mateixa raó de proporció:

$$7\text{x}10 = \frac{10 \text{ cm}}{7 \text{ cm}} = 1{,}43$$

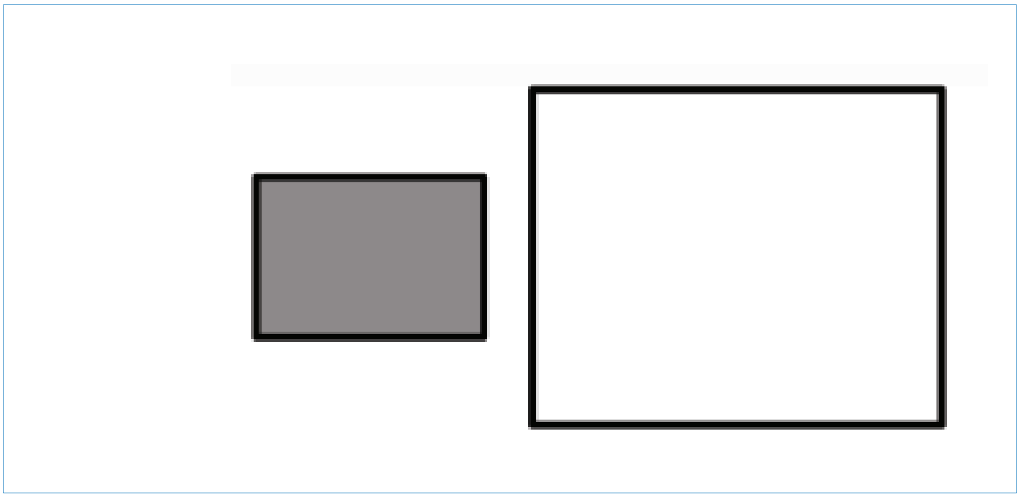
$$10\text{x}15 = \frac{15 \text{ cm}}{10 \text{ cm}} = 1{,}5$$

$$18\text{x}24 = \frac{24 \text{ cm}}{18 \text{ cm}} = 1{,}33$$

$$20\text{x}30 = \frac{30 \text{ cm}}{20 \text{ cm}} = 1{,}5$$

Els formats de fotografies proporcionals als negatius són, per tant, el 10x15 i el 20x30, ja que tots tres tenen la mateixa raó de proporció.

Fixa't en les figures següents:



A primera vista ja es veu que un és més gran que l'altre, però tenen la mateixa forma? És evident que no, el segon és més quadrat que el primer. És a dir, a més de ser de mides diferents, les seves proporcions són diferents.

ACTIVITAT

Mesura amb un regle els costats dels quadrats anteriors i calcula les seves raons de proporció.

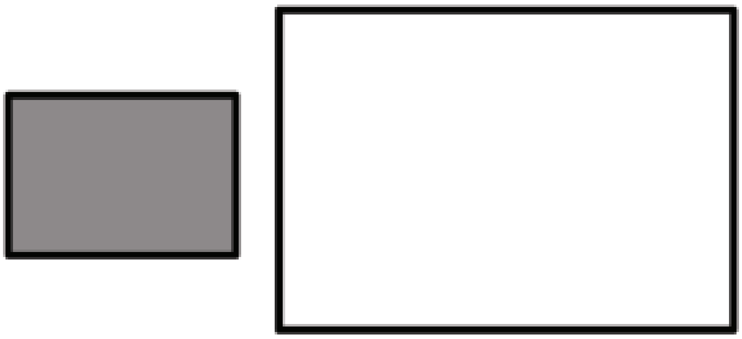
Resolució

Si mesures els quadrats veuràs que el primer fa 3 cm x 2,1 cm i el segon 5,4 cm x 4,4 cm. Les seves raons de proporció són:

$$\frac{2{,}1 \text{ cm}}{3 \text{ cm}} = 0{,}7 \qquad \text{i} \qquad \frac{4{,}4 \text{ cm}}{5{,}4 \text{ cm}} = 0{,}81$$

Ja hem vist que les mides dels seus costats no eren proporcionals; per tant, com és lògic, les seves raons de proporció són diferents.

Fixa't ara en aquests dos rectangles:



Torna a ésser evident que el segon és bastant més gran que el primer, però, i la forma? Són diferents o són iguals? És a dir, guarden la mateixa proporció? Aparentment sí, però no ho sabrem del cert si no calculem la raó de proporció de cadascun d'ells i la comparem. Anem a fer-ho.

ACTIVITAT

Mesura amb un regle els costats dels rectangles anteriors i calcula la raó de proporció de cadascun d'ells.

Resolució

Si mesures els rectangles veuràs que el primer fa 2,1 cm x 3 cm i el segon 4,2 cm x 6 cm. Les seves raons de proporció són:

$$\frac{2{,}1 \text{ cm}}{3 \text{ cm}} = 0{,}7 \qquad \text{i} \qquad \frac{4{,}2 \text{ cm}}{6 \text{ cm}} = 0{,}7$$

Efectivament, els dos rectangles són proporcionals ja que tots dos tenen la mateixa raó de proporció i per tant:

$$\frac{2{,}1 \text{ cm}}{3 \text{ cm}} = \frac{4{,}2 \text{ cm}}{6 \text{ cm}} = 0{,}7$$

- **Activitats d'aprenentatge 1, 2 i 3**

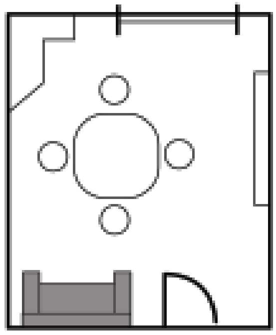
2. Escales: plànols, mapes i maquetes

La proporcionalitat ens permet dibuixar figures de diferents mides, però amb la mateixa forma. Això ho utilitzem per dibuixar objectes que són massa grans per representar-los a mida real. Imagina que vas a visitar la Catedral de Girona i li fas una fotografia. Evidentment quan la revelis tindràs una imatge de la Catedral, amb la mateixa forma que la Catedral, però molt més petita. Com hem vist, si conserva la mateixa forma, és perquè totes les mesures tenen la mateixa proporció respecte a la Catedral.

Quan fem un dibuix d'una habitació o un plànol d'una ciutat o d'un país, totes les distàncies es redueixen seguint la mateixa raó de proporció. En aquest cas la raó s'anomena escala.

L'**escala** d'un plànol o d'un mapa és la relació entre la distància sobre el paper i la distància real

$$\text{Escala} = \frac{\text{Distància sobre el paper}}{\text{Distància real}}$$



Anem a calcular les mides reals d'aquesta habitació. L'escala és 1:100. Això ens diu que una unitat del plànol correspon a 100 unitats de la realitat. Fixa't que les escales no tenen unitats. Podem utilitzar les que vulguem, sempre que utilitzem les mateixes per al plànol o mapa i per a la distància real.

L'escala 1:100 pot significar:

- 1 cm sobre el paper correspon a 100 cm en la realitat, és a dir, a 1 m.
- 1 dm sobre el paper correspon a 100 dm en la realitat, és a dir, a 10 m.
- 1 mm sobre el paper correspon a 100 mm en la realitat, és a dir, a 0,1 m.

Si mesurem l'amplada de l'habitació, veiem que sobre el mapa fa 3,5 cm, per tant:

Amplada real de l'habitació = 3,5 cm x 100 = 350 cm = 3,5 m

ACTIVITAT 1:

Calcula la llargada de l'habitació.

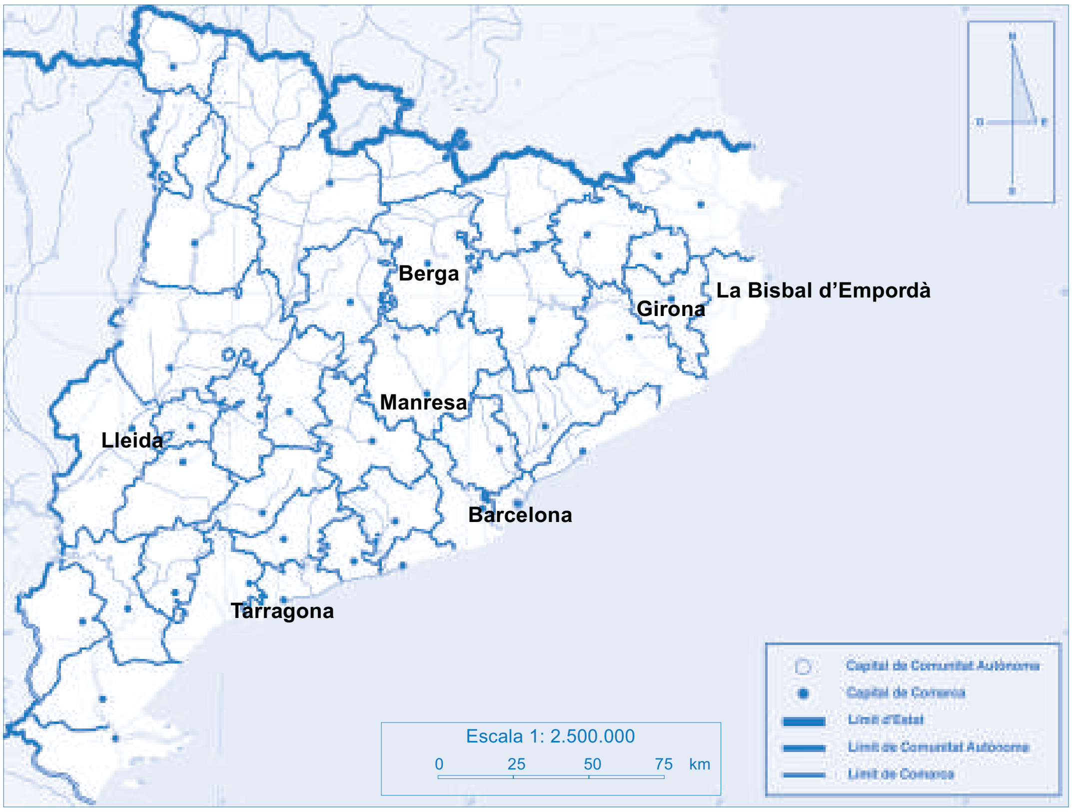
Resolució:

Si mesurem sobre el plànol, trobem que la llargada de l'habitació és de 4,2 cm.

Per tant:

Llargada real de l'habitació = 4,2 cm x 100 = 420 cm = 4,2 m

ACTIVITAT 2:



Calcula la distància real entre Manresa i Barcelona.

Resolució

L'escala del mapa és 1:2.500.000, és a dir:

1 cm en el mapa són 2.500.000 cm en la vida real

1cm $\longrightarrow$ 2.500.000 cm = 25 Km

Per tant, cada centímetre damunt del mapa representa 25 quilòmetres en la vida real. La distància entre Manresa i Barcelona, en el mapa, és d'1,9 cm, i per tant en la vida real és de:

1,9 x 25 Km = 47,5 Km.

- **Activitats d'aprenentatge 4 i 5**

3. La raó de proporció ens permet buscar dades

Pensa un moment en el que hem fet fins ara:

- Les proporcions ens permeten representar, a escala, objectes i espais que en la realitat són massa grans per poder fer-ne representacions a la mateixa mida.
- Les proporcions ens permeten trobar dades que desconeixem a partir d'altres dades.

Quedem-nos aquí un moment, ja que això és més important del que sembla. Fixa't, sabem l'escala del mapa, 1:2.500.000, i sabem la distància entre dues ciutats damunt del paper i volem trobar la distància real entre les dues ciutats. No sabem aquesta distància, però sabem una cosa fonamental: la distància real és proporcional a les altres tres dades.

Existeix una propietat anomenada **propietat fonamental de les proporcions** que ens permet trobar aquesta quarta dada i que és la base de la regla de tres. Tornem al cas de les fotografies. Dèiem que els formats 10x15 i 20x30 eren proporcionals entre ells:

$$\frac{15}{10} = \frac{30}{20}$$

Fixa't que això ho podem escriure d'una altra manera:

15 : 10 = 30 : 20

La propietat fonamental de les proporcions diu:

En una proporció, el producte dels extrems és igual al producte dels mitjans

Producte dels extrems:

15 x 20 = 300

Producte dels mitjans:

10 x 30 = 300

ACTIVITAT

Busca el valor que falta en les proporcions següents:

a) $\frac{2}{4} = \frac{3}{x}$ **b)** $\frac{5}{3} = \frac{x}{9}$ **c)** $\frac{x}{1} = \frac{4}{6}$ **d)** $\frac{x}{3} = \frac{10}{5}$

Resolució

a) $2 \cdot x = 3 \cdot 4 \longrightarrow 2 \cdot x = 12 \longrightarrow x = \frac{12}{2} \longrightarrow x = 6$

Fixa't que per trobar el valor de la x, el nombre que l'està multiplicant passa a l'altre costat de l'igual dividint.

b) $5 \cdot 9 = 3 \cdot x \longrightarrow 3 \cdot x = 45 \longrightarrow x = \dfrac{45}{3} \longrightarrow x = 15$

c) $6 \cdot x = 4 \cdot 1 \longrightarrow 6 \cdot x = 4 \longrightarrow x = \dfrac{4}{6} \longrightarrow x = 0{,}67$

d) $5 \cdot x = 3 \cdot 10 \longrightarrow 5 \cdot x = 30 \longrightarrow x = \dfrac{30}{5} \longrightarrow x = 6$

Hi ha dades que depenen d'altres

Un treballador cobra per hores segons la taula següent:

Hores treballades	€ cobrats
5	60
6	72
7	84
8	96

Lògicament, aquestes dues magnituds depenen l'una de l'altra. Com més hores treballa més cobra, i a l'inrevés, si cobra més és perquè treballa més. És a dir, quan una de les dues magnituds augmenta, l'altra també ho fa i a l'inrevés. A més, en aquest cas l'augment és proporcional:

$$\frac{60}{5} = \frac{72}{6} = \frac{84}{7} = \frac{96}{8} = 12$$

Quan en augmentar una magnitud una altra també augmenta i, a més, ho fa de forma proporcional, diem que són dues magnituds **directament proporcionals**.

Per trobar la quarta, la regla de tres

Imagina que anem a comprar tomàquets. Comprem dos quilos i ens costen 4€. En arribar a casa veiem que no en tenim prou i baixem a comprar-ne més. Quant ens costarà?

És evident que això depèn de la quantitat de tomàquets que comprem. Com més tomàquets comprem més haurem de pagar. Fixa't que aquestes dues magnituds (quantitat de tomàquets i preu total) són directament proporcionals.

Decidim comprar-ne 4 quilos. Quant ens constaran?

Analitzem la situació:

- Tenim dues magnituds que són directament proporcionals
- Coneixem tres quantitats, dues de la quantitat de tomàquets i una del preu total

Quantitat de tomàquets (kg)	Preu total
2	4€
4	?

De fet, atès que són magnituds proporcionals podem aplicar la propietat fonamental de les proporcions, la qual cosa ens permet trobar el valor que busquem

$$\frac{2}{4} = \frac{4}{x}$$

$$2x = 4 \cdot 4 \longrightarrow x = \frac{16}{2} \longrightarrow x = 8$$

Com és evident, si 2 quilos valen 4€, el doble de quilos valdran el doble d'euros: 8€.

Aquesta manera de resoldre els problemes és el que anomenem **regla de tres** i encara ho podem expressar d'una altra manera:

Si 2 Kg valen 4€
Aleshores 4 Kg valen x €

ACTIVITAT

Un grup d'excursionistes caminen a una mitjana de 3 Km cada hora. Volen fer una travessia de 15 Km i volen saber quantes hores hi invertiran.

Resolució

Els quilòmetres recorreguts i el temps invertit són magnituds directament proporcionals, per la qual cosa podem aplicar la regla de tres.

Si a fer 3 Km triguen 1 hora
aleshores a fer 15 Km triguen x hores

O el que és el mateix:

$$\frac{3}{15} = \frac{1}{x}$$

Si fem les operacions:

$$3x = 15 \cdot 1 \longrightarrow x = \frac{15}{3} \longrightarrow x = 5$$

Els excursionistes trigaran 5 hores.

Raons per entendre les dades: el tant per cent

Mira't la notícia següent apareguda a *El Periódico* el mes de juny de 2002.

... La troballa que més ha preocupat els autors de l'estudi és l'alt percentatge d'adolescents –un 22% de nois i un 9% de noies– que han conduït intoxicats per alcohol o drogues. Un 40% ha pujat a un cotxe conduït per una persona èbria. «Una de les característiques de l'adolescència és assumir riscos, i aquesta és una forma clara i conscient de fer-ho», afirma la investigadora.

Només que obris qualsevol diari, veuràs moltes notícies que ens parlen de percentatges (un 22% de nois, un 9% de noies, un 40% d'adolescents,...). Però, què és exactament un percentatge? Quan diem que un 40% d'adolescents han pujat en un cotxe conduït per una persona sota els efectes de l'alcohol volem dir que de cada 100 adolescents 40 ho han fet.

L'enquesta a què fa referència la notícia es va realitzar a 6.952 alumnes de Secundària i Batxillerat de Catalunya. D'aquests, 2.781 alumnes van reconèixer haver anat en un cotxe conduït per una persona èbria. Fixa't que si diguéssim 2.781 de cada 6.952 et seria molt difícil saber si són molts o pocs o fins i tot seria difícil comparar-ho amb d'altres dades. És molt més fàcil fer-se una idea del valor d'aquestes dades si parlem del 40% o fins i tot de 4 de cada deu.

Per trobar el percentatge d'unes dades hem de buscar una fracció proporcional en què el denominador sigui cent.

ACTIVITAT

En una classe de 30 persones 9 porten ulleres. Quin és el percentatge?

Resolució

Si de 30 persones duen ulleres 9
Aleshores de 100 persones en duran x

$$\frac{30}{100} = \frac{9}{x} \longrightarrow 30x = 9 \cdot 100 \longrightarrow x = \frac{900}{30} \longrightarrow x = 30$$

Un 30% dels alumnes de la classe porta ulleres.

Ara ja sabem com calcular el tant per cent a partir d'unes dades, però i al revés, sabries fer-ho? Anem a veure-ho.

ACTIVITAT

Calcula el 23% de 5.000.

Un tant per cent és en ell mateix una raó de proporció entre dos nombres (23/100) i recorda que dèiem que si són proporcionals ens calen tres nombres per trobar el quart (tenim 23, 100 i 5.000). No ens ha d'ésser difícil, per tant, trobar la solució.

Resolució

$$\frac{23}{100} = \frac{x}{5.000} \longrightarrow 5.000\,\frac{23}{100} = x \longrightarrow x = 1.150$$

El 23% de 5.000 és 1.150.

Dèiem que un percentatge és una raó de proporció i, per tant, també es pot expressar en forma decimal. Imagina que sabem que el 20% dels habitants d'un país tenen els ulls blaus i volem saber quanta gent d'una ciutat de 350.000 habitants té els ulls blaus. Evidentment ho podríem fer com a l'exemple anterior, però hi ha una manera més ràpida de fer-ho. Anem pas a pas.

$$\frac{20}{100} = \frac{x}{350.000} \longrightarrow 350.000\,\frac{20}{100} = x$$

Aturem-nos un moment. Fixa't que per calcular el percentatge d'una quantitat el que fem és multiplicar aquesta quantitat per la raó de proporció que representa el tant per cent:

$$X = 350.000 \cdot 0{,}20 = 70.000$$

70.000 persones tenen els ulls blaus.

El tant per mil

Tornem a la ciutat d'abans. Imagina que dels 350.000 habitants, 1.500 fan més de dos metres d'alçada. Si volguéssim saber quin percentatge representa això faríem:

$$\frac{x}{100} = \frac{1.500}{350.000} \longrightarrow 1.500 \cdot 100 = 350.000x \longrightarrow \frac{150.000}{350.000} = x$$

El 0,43% de la població mesura més de 2,00 metres d'alçada. Una altra forma d'expressar-ho seria respecte de cada 1.000 habitants, enlloc de cada 100.

$$\frac{x}{1.000} = \frac{1.500}{350.000} \longrightarrow 1.500 \cdot 1.000 = 350.000x \longrightarrow \frac{1.500.000}{350.000} = x$$

Igualment podríem dir que els habitants que superen els dos metres són el 4,3‰ (és a dir, el 4,3 per mil).

- **Activitats d'aprenentatge 6, 7 i 8**