

Unitat 2

35

ELS NOMBRES ENTERS

UNITAT 2 ELS NOMBRES ENTERS

1. LA TEMPERATURA

Matemàtiques, Ciència i Tecnologia

què treballaràs?

En acabar la unitat has de ser capaç de:

- Reconèixer els nombres enters. Ordenar-los i representar-los sobre una recta.
- Explicar el valor absolut d'un nombre enter.
- Construir un gràfic cartesià a partir d'una taula de valors o d'un conjunt de punts.

1. Positiu i negatiu

En la unitat anterior hem vist la necessitat de disposar de nombres positius i negatius per comptabilitzar diferents situacions com la mesura de la temperatura.

El conjunt dels nombres naturals és el conjunt dels nombres enters (sense decimals) i positius (més grans que zero).

Per mesurar la temperatura del cos humà o la temperatura atmosfèrica de països càlids ja en tenim prou, però si volem mesurar la temperatura de països freds o, per exemple, del nostre congelador, no en tenim prou amb els nombres enters. Ens calen nombres més petits que el zero: els nombres negatius. Aquest nou conjunt s'anomena nombres enters.

El conjunt dels nombres enters està format pels **nombres enters positius** (són els nombres naturals precedits del signe +), els **nombres enters negatius** (són els nombres naturals precedits del signe -) i el zero.

Els nombres enters es representen per la lletra **Z** i és un conjunt il·limitat.

$$Z = \{\dots -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4\dots\}$$

Fixa't en els termòmetres de la figura. El primer ens dona la temperatura màxima i el segon la temperatura mínima d'un dia d'hivern.



Tots dos indiquen una temperatura de 10 graus, però amb una diferència important: en el primer cas són 10°C sobre zero i en el segon cas 10°C sota zero. En el llenguatge normal, per diferenciar-los, utilitzem les expressions sobre zero i sota zero, però matemàticament s'utilitzen els signes + i -. Per indicar les temperatures que estan per sobre del zero s'utilitzen els nombres naturals

precedits del signe + i per indicar les que estan per sota del zero s'utilitzen nombres naturals precedits pel signe -.

Per tant, diem que la temperatura que indica el primer termòmetre és de $+10^{\circ}\text{C}$, mentre que el segon ens indica una temperatura de -10°C .

Des de fa un temps a les grans ciutats han començat a proliferar els aparcaments subterranis. Això ha plantejat el problema de com numerar les noves plantes. Imagina que vas a uns grans magatzems i aparques el cotxe en la planta més baixa del soterrani. Com indicaries aquesta planta? La número zero? La número u? Cal establir un criteri perquè tots ens entenguem. Generalment diem que la planta baixa és la planta 0 i a partir d'aquesta totes les plantes que es troben per sobre es numeren amb els nombres positius i totes les que estan per sota, al soterrani, es numeren amb els nombres negatius.

ACTIVITAT

Un edifici té soterrani, planta baixa, entresol, 1r pis, 2n pis i àtic.

1. A quina planta correspon l'àtic? A quina planta correspon en realitat el 1r pis? I el soterrani?
2. Quantes plantes has de pujar si vas des del soterrani al primer pis?

Solució

1. Si prenem com a sistema de referència la planta baixa, aquesta serà la planta 0. Per tant, totes les que estiguin per sota seran negatives i totes les que estan per sobre seran positives:

Àtic	Planta 4
Segon pis	Planta 3
Primer pis	Planta 2
Entresol	Planta 1
Planta baixa	Planta 0
Soterrani	Planta -1

Seguint la taula, l'àtic seria la planta 4, el primer pis en realitat correspondria a la planta 2, i el soterrani seria la planta -1.

Fixa't que, a vegades, per indicar els números enters positius no utilitzem el signe +.

2. Per pujar del soterrani al primer pis haurem de pujar a la planta baixa, a l'entresol i a la primera planta. És a dir, haurem de pujar tres pisos.

Una altra situació en què ens calen els nombres negatius, o si més no un sistema de referència, és per situar fets històrics. Imagina que, per conveni, s'hagués establert que l'any que es va formar la Terra fos l'any zero. Lògicament, tot el que hagués passat damunt del nostre planeta hagués passat després de la seva formació i per tant tots els anys serien positius. Però això no és així; de fet, en la civilització occidental prenem com a referència l'any de naixement de Crist. A partir d'aquella data tots els anys són positius. Així, podem dir que l'any 1492 Colom va descobrir Amèrica. Matemàticament seria l'any +1492. Però,

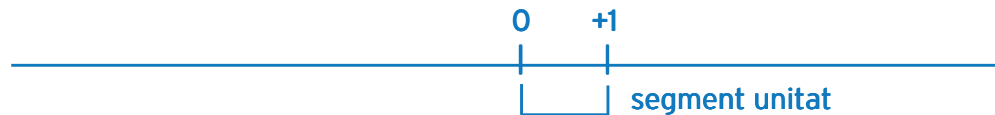
què passa amb tots aquells fets que van succeir abans del naixement de Crist? Lògicament ho hem d'indicar d'alguna manera. En el llenguatge oral utilitzem l'expressió «*abans de Crist (aC)*». Per exemple, Arquimedes, el gran savi grec, va néixer a Siracusa l'any 287 aC. Matemàticament direm que va néixer l'any -287 .

• **Activitats d'aprenentatge 1, 2 i 3**

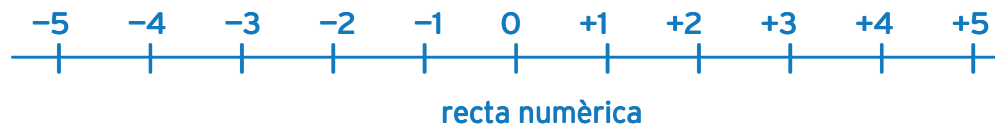
2. Els nombres enters es poden representar sobre una recta

Fixa't un altre cop en els termòmetres de la figura. Els nombres enters en realitat estan representats damunt d'una recta. De fet aquesta és la manera normal de representar els nombres enters. Però, com es fa això? Anem a veure-ho.

- El primer que hem de fer és dibuixar una recta i escollir un punt qualsevol d'aquesta per assignar-li el número 0. Aquest punt s'anomena **origen**.
- A partir de l'origen marquem un punt a la seva dreta i li donem el valor +1. La distància entre el 0 i el +1 és el que anomenem **segment unitat**.



- A partir del +1 cap a la dreta col·loquem els successius nombres enters positius (+2, +3, +4...) i separarem cadascun de l'anterior per una distància igual a la del segment unitat.
- A partir del 0 cap a l'esquerra col·loquem de la mateixa manera els nombres enters negatius començant pel -1 i seguint amb el -2, -3...



ACTIVITAT



Quina distància hi ha entre el -2 i el 0? I entre el +2 i el 0?

La distància entre el -2 i el 0 és de dos segments unitat, a l'igual que la distància entre el 0 i el +2, que també és de dos segments unitat.

Els nombres que es troben a igual distància del 0 s'anomenen nombres simètrics. Els **nombres simètrics** tenen el mateix valor, però signe contrari.

Alguns exemples de nombres simètrics són: -6 i $+6$, -10 i $+10$, -1.320 i $+1.320$...

Fixa't que la distància d'un nombre al 0 és el valor d'aquest nombre però en positiu. Per exemple, la distància entre el -3 i el 0 és 3. De la mateixa manera la distància entre el +3 i el zero és 3. Aquesta distància és el que anomenem valor absolut.

El nombre natural que obtenim al prescindir del signe d'un nombre enter és el que anomenem **valor absolut** d'aquest nombre enter.

Per indicar el valor absolut d'un nombre utilitzem dues ratlles verticals: $| |$

ACTIVITAT 1

Indica els valors absoluts dels nombres -2 , $+4$ i 0 .

Solució

$$|-2| = 2.$$

$$|+4| = 4.$$

$$|0| = 0.$$

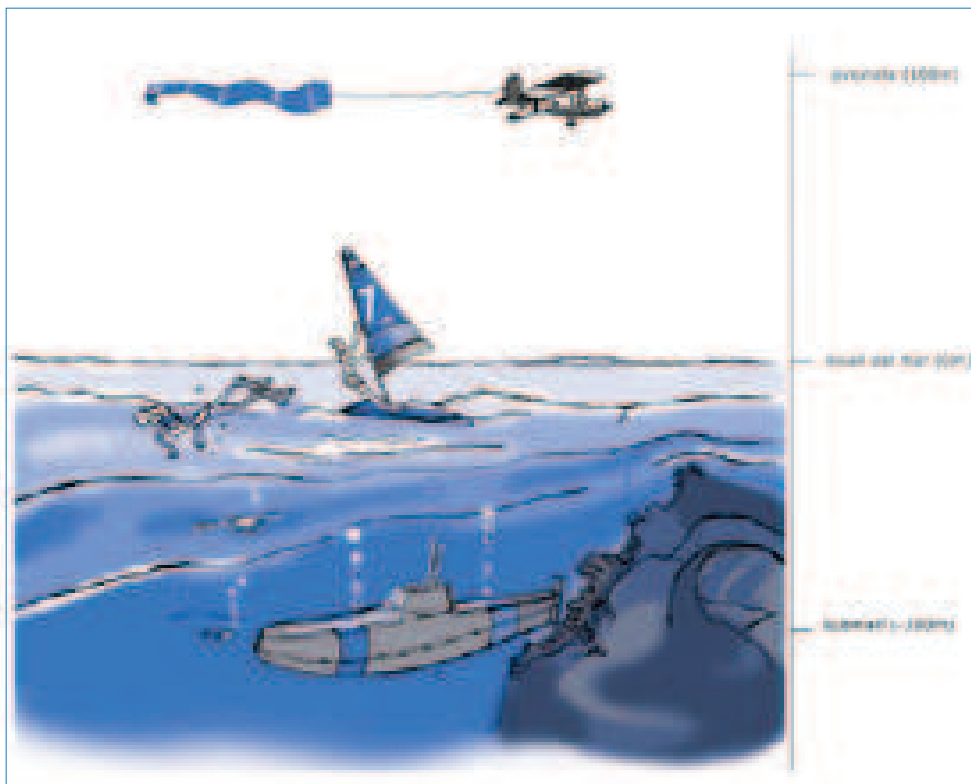
ACTIVITAT 2

Una avioneta que vola a 100 m d'alçada detecta un submarí que es troba a 100 m de profunditat.

1. Representa les posicions de cada un d'ells sobre una recta.
2. Expressa les posicions amb valor absolut. Justifica la teva resposta.
3. Quina distància hi ha entre l'avioneta i el submarí?

Solució

1.



2. Si prenem el nivell del mar com a 0, la posició de l'avioneta serà de $+100$ m i la del submarí de -100 m. Però com que la distància entre el submarí i el nivell del mar és la mateixa que entre l'avioneta i el nivell del mar, el valor absolut dels dos nombres ($|+100| = |-100| = 100$) és el mateix, és a dir, cent.
3. La distància entre el submarí i el nivell del mar és de 100 m i la distància entre l'avioneta i el nivell del mar és de 100 m. Per tant, la distància entre el submarí i l'avioneta és la suma d'aquestes dues distàncies: $100 \text{ m} + 100 \text{ m} = 200 \text{ m}$.

Fixa't que per marcar distàncies és molt important establir el sistema de referència. En aquest cas hem utilitzat el nivell del mar.

- **Activitats d'aprenentatge 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 i 11**

3. Com s'ordenen els nombres enters?

La següent taula ens mostra les temperatures de diferents ciutats europees durant un dia d'hivern:

Ciutat	Temperatura (°C)
Barcelona	11
Sevilla	15
París	3
Perpinyà	0
Munic	-7
Praga	-12
Moscou	-21

Realment les diferències de temperatura entre aquestes ciutats poden ser molt grans. És evident que la temperatura més freda d'aquestes ciutats és la de Moscou i la més càlida la de Sevilla. Si volguéssim ordenar aquestes temperatures ho faríem de la següent manera:

$$-21 < -12 < -7 < 0 < +3 < +11 < +15$$

El signe $<$ vol dir *menor que* i ens indica l'ordenació entre dos nombres. $-3 < -2$ es llegeix *-3 és menor que -2*.

De la mateixa manera $>$ vol dir *major que*. En el cas anterior escriuríem $-2 > -3$ i es llegeix *-2 és major que -3*.

Si representem sobre una recta les temperatures de la taula anterior ens trobem:



Veiem que el més gran de dos nombres enters és el que està situat més a la dreta en la recta numèrica.

Una altra manera d'ordenar els nombres és utilitzant els criteris següents:

- On fa més fred, a Munic o a Barcelona? És evident que fa més fred a Munic ($-7 < 11$).

Tots els nombres positius són més grans que zero i que qualsevol nombre negatiu.

- On fa més fred, a Perpinyà o a Moscou? Evidentment, a Moscou ($-21 < 0$)

El zero és més gran que qualsevol nombre negatiu.

- On fa més fred, a Munic o a Praga? Evidentment, a Praga ($-12 < -7$).

Si tenim dos nombres enters negatius, el més gran és el que té el valor absolut més petit.

Fixem-nos que, tant si ordenem els nombres enters situant-los sobre la recta numèrica o com si ho fem seguint els criteris anteriors, l'ordenació és la mateixa.

- **Activitats d'aprenentatge 12, 13, 14 i 15**

4. El gràfic cartesià

Sovint no en tenim prou en conèixer unes dades, com per exemple saber que les temperatures de la ciutat de Barcelona han estat: -2°C , -1°C , 5°C , 3°C , 0°C . Necessitem saber a quins dies de l'any corresponen aquestes temperatures.

Per recollir aquestes dades i facilitar la seva interpretació les col·loquem en una taula, anomenada **taula de valors**.

La següent taula ens relaciona les temperatures anteriors i el dia del mes de febrer en què van tenir lloc.

Dia	Temperatura ($^{\circ}\text{C}$)
5	-2
10	-1
15	5
20	3
25	0

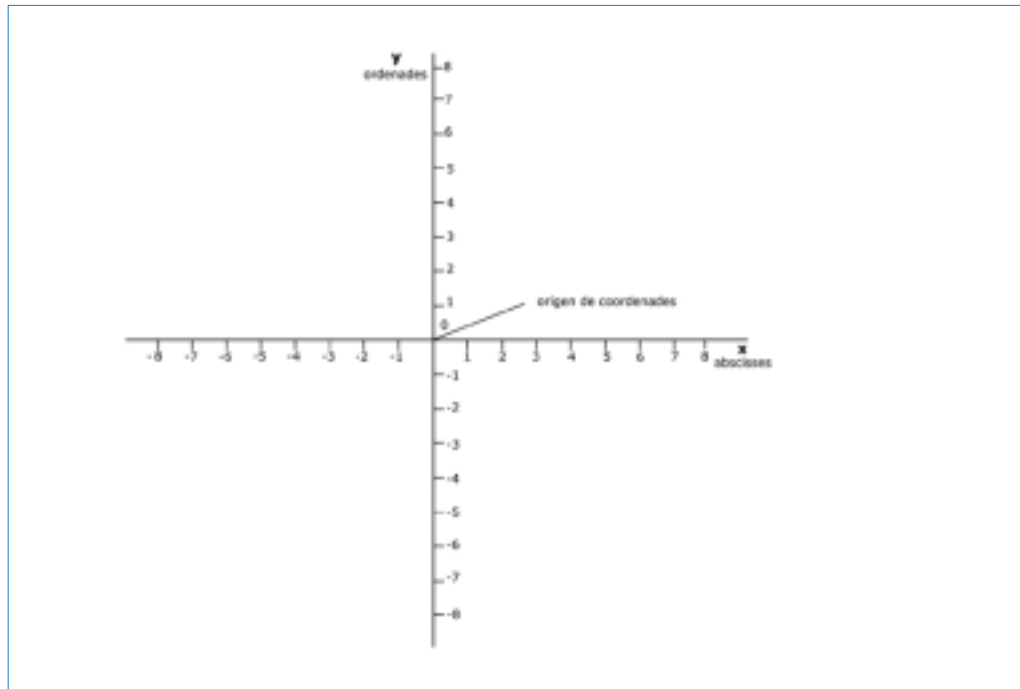
Construcció d'un gràfic cartesià

Si volem representar les temperatures tenint en compte els dies no podem utilitzar la recta numèrica perquè només hi podríem col·locar les temperatures. Necessitem un altre tipus de gràfic que ens permeti situar dues magnituds: la temperatura i el dia en què es produeix. És el **gràfic cartesià**.

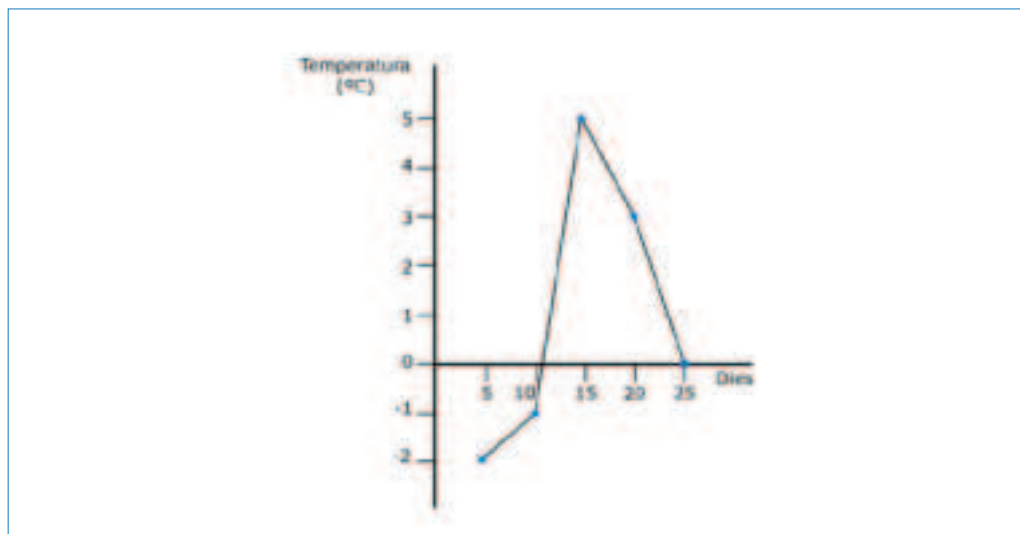
En la construcció d'un gràfic cartesià seguim els passos següents:

1. Dibuixem dues rectes perpendiculars, anomenades **eixos de coordenades**. Anomenem **eix X** o **eix d'abscisses** a la recta horitzontal i **eix Y** o **eix d'ordenades** a la **recta vertical**. Situem el punt **O** en el punt de tall de les dues rectes o eixos. El punt O és l'**origen de coordenades**.
2. Representem els nombres enters en l'eix X de la manera habitual, és a dir, els nombres enters positius a la dreta del O i els negatius a l'esquerra del O.

3. A l'eix Y representem els nombres enters positius en la semirecta superior i els negatius en la semirecta inferior.



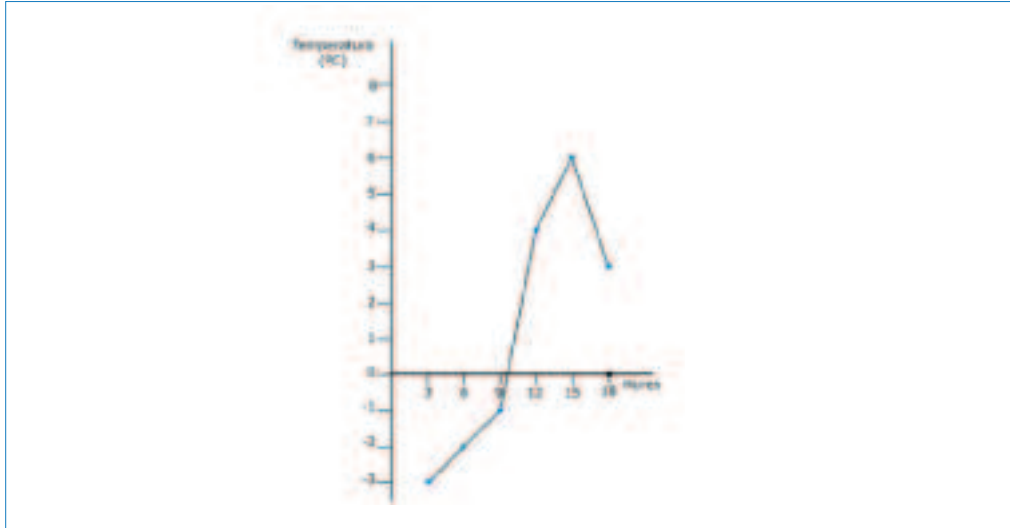
Ara que ja tenim el gràfic cartesià podem representar-hi els valors de la taula.



Per representar les dades de la taula en un gràfic cartesià es fa com si juguésim al joc dels vaixells. La primera dada que hem de representar és la temperatura del dia 5 (que és -2°C). Busquem el valor 5 en l'eix de les X i el valor -2 en l'eix de les Y. El lloc on es creuen aquests valors és el punt que buscàvem $(+5, -2)$. Fem el mateix amb els altres parells de nombres $(10, -1)$, $(15, 5)$, $(20, 3)$ i $(25, 0)$.

La gràfica ens permet saber ràpidament què ha passat amb les temperatures durant uns dies de febrer a Barcelona. Així, veiem que la temperatura va pujant durant la primera meitat del mes i que baixa durant la segona quinzena. Fixa't que aquesta manera de representar les dades ens permet observar la informació que contenen aquestes dades d'una manera més ràpida i senzilla.

ACTIVITAT 1



La gràfica anterior ens mostra les temperatures d'un dia d'hivern a la ciutat de Vic.

Digues:

1. A quina hora la temperatura ha estat més alta?
2. Quina ha estat la temperatura més baixa?
3. Construeix la taula de valors.

Solució

1. La temperatura més alta s'ha produït a les tres de la tarda (15 hores). Fins aquella hora la temperatura ha anat pujant i a partir d'aquella hora ha començat a minvar.
2. La temperatura més baixa s'ha produït a les 3 de la matinada (3 hores). A partir d'aleshores la temperatura ha començat a pujar.

3.

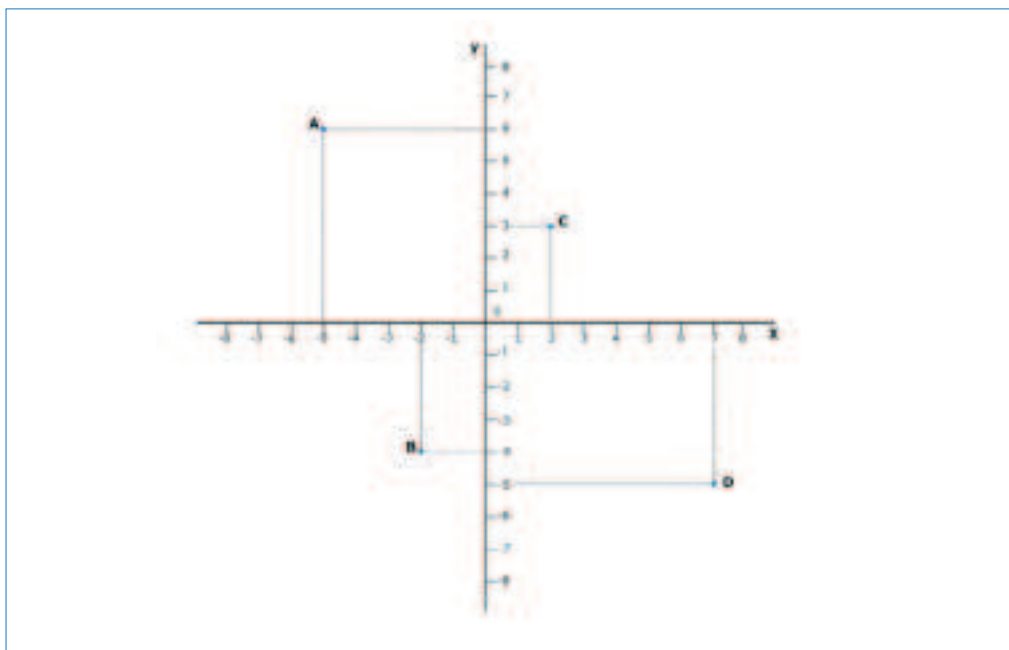
Hores	Temperatures (°C)
3	-3
6	-2
9	-1
12	4
15	6
18	3

Hi ha una altra forma matemàtica d'expressar aquests valors i és posant-los entre parèntesi. $(+3,-3)$, $(+6,-2)$, $(+9,-1)$, $(+12,+4)$, $(+15,+6)$ i $(+18,+3)$. Es posa primer el nombre que hi ha a l'eix X i després el que correspon a l'eix Y.

Cada parell de nombres representa un punt de la gràfica. Cadascun d'aquest parell de valors s'anomena **coordenades del punt**.

ACTIVITAT 2

De la gràfica següent:



1. Digues les coordenades dels punts A i C.
2. Digues quins punts tenen abscisses negatives.
3. Digues quins punts tenen ordenades positives.

Solució

1. Les coordenades del punt A són $(-5,+6)$ i les del punt C són $(+2,+3)$.
2. Els punts amb abscisses negatives són el punt A = $(-5,+6)$ i B = $(-2,-4)$.
L'abscissa d'un punt és el valor que pren en l'eix de les abscisses o eix X.
3. Els punts amb ordenades positives són el punt A = $(-5,+6)$ i el punt C = $(+2,+3)$. L'ordenada d'un punt és el valor que pren en l'eix de les ordenades o eix Y.

- **Activitats d'aprenentatge 16, 17 i 18**